

PPKE - ITK

PARAMÉTERES EGYENLETEK

NAGYNÉ PÁLMAI PIROSKA
KÖBÁNYAI SZENT LÁSZLÓ GIMNÁZIUM

SZÉCHENYI  2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap

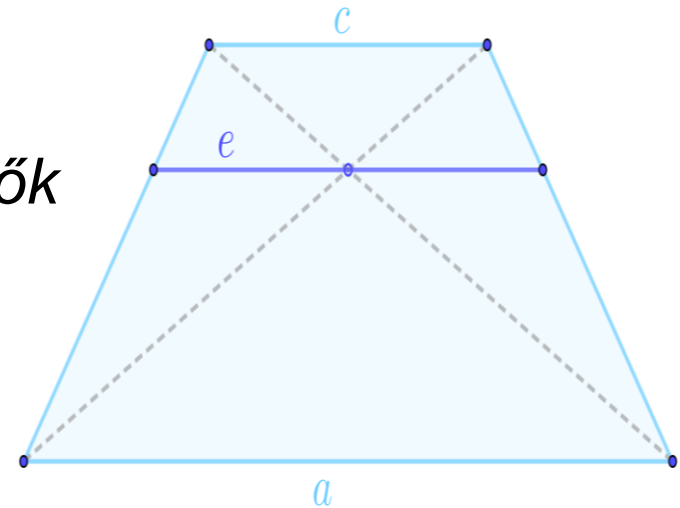


BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

BEVEZETŐ GONDOLATOK

MI JUT ESZÜNKBE A PARAMÉTERRŐL?

- Konkrét adatok helyett betűk
- Első és másodfokú paraméteres egyenletek
- Új összefüggések felfedezése
 - pl.: a harmonikus közép felfedezése a párhuzamos szelők témakörben
 - feladatok általánosítása pl.: keveréses, munkavégzéses feladatok
 - képletek levezetése pl.: sorozatok összegképlete
- Feladatok „gyártása”



MI JUT ESZÜNKBE A PARAMÉTERRŐL?

- **Feladat megoldás paraméter bevezetésével.**

➤ *(A11.) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $y = x + 17$ egyenletű egyenessel, és érinti az $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 14 = 0$ egyenletű kört!*

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1998.

➤ *pl.: síkgeometriai feladat megoldása koordinátageometriai eszközökkel*

FELADAT MEGOLDÁS PARAMÉTER BEVEZETÉSÉVEL

➤ *pl.: függvény értékkészletének meghatározása*

(A27.) Határozza meg a következő függvény értékkészletét!

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x$$

Az értékkészlet vizsgálatát paraméteres egyenlet megoldására vezetjük vissza. Felhasználjuk hogy egy f függvény értékkészlete azon p valós számok halmaza, amelyekre az $f(x) = p$ egyenletnek van megoldása.

Megoldjuk a $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = p$ paraméteres egyenletet.

KIDOLGOZOTT 8.

Határozza meg p értékét úgy hogy az $x^2 + (2p + 5)x + p^2 + 3p - 4 = 0$ egyenletnek

- a) ne legyen valós gyöke;
- b) két egyenlő valós gyöke legyen
(egy valós gyöke legyen);
- c) gyöke legyen a 0;
- d) két különböző pozitív gyöke legyen;
- e) egy pozitív és egy negatív gyöke legyen;
- f) két különböző negatív gyöke legyen!

K8 $x^2 + (2p + 5)x + p^2 + 3p - 4 = 0$

A megoldásokhoz szükségünk lesz a másodfokú egyenlet diszkriminánsára.

$$D = (2p + 5)^2 - 4(p^2 + 3p - 4) = 8p + 41$$

a) Az egyenletnek nincs valós gyöke, ha $D < 0$.

Ez $p < -\frac{41}{8} = -5,125$ esetén teljesül.

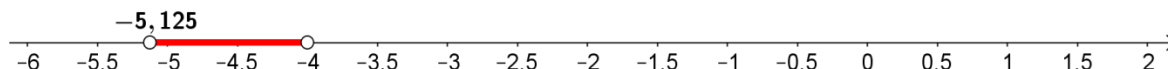
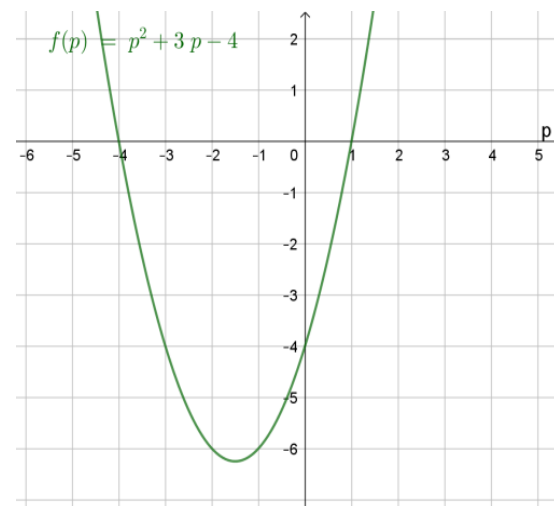
b) Egy valós gyöke van, ha $D = 0$, azaz, ha $p = -5,125$.

c) Az egyenlet az $x = 0$ értékre teljesül, ezért ezt behelyettesítve a $p^2 + 3p - 4 = 0$ összefüggést kapjuk. Ez akkor igaz, ha $p = -4$ vagy ha $p = 1$.

K8. $x^2 + (2p + 5)x + p^2 + 3p - 4 = 0$

d) Egy másodfokú egyenletnek két különböző pozitív valós gyöke van, ha a diszkriminánsa pozitív, valamint a gyökök összege és szorzata is pozitív.

- $D > 0$, ha $p > -5,125$
- $x_1 + x_2 = -(2p + 5) > 0$, ha $p < -2,5$
- $x_1 \cdot x_2 = p^2 + 3p - 4 > 0$,
ha $p < -4$ vagy $p > 1$.



A másodfokú egyenletnek két különböző pozitív gyöke van, ha $-5,125 < p < -4$.

K8. $x^2 + (2p + 5)x + p^2 + 3p - 4 = 0$

- e) Ha az $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ egyenletnek két különböző előjelű valós gyöke van, akkor a gyökök szorzata negatív.
- Elég csak ezt vizsgálni, mert ha ez teljesül, akkor az egyenlet gyökei valósak, hiszen, ha $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$, akkor $a \cdot c$ is negatív és így $D = b^2 - 4ac$ biztosan pozitív.
 - A feladatunkban $x_1 \cdot x_2 = p^2 + 3p - 4 < 0$. A megoldás leolvasható a d)-ben ábrázolt grafikonról: $-4 < p < 1$.

K8. $x^2 + (2p + 5)x + p^2 + 3p - 4 = 0$

f) Az egyenletnek két különböző negatív gyöke van, ha a diszkriminánsa pozitív, valamint a gyökök összege negatív és a szorzatuk pozitív.

- $D > 0$, ha $p > -5,125$
- $x_1 + x_2 = -(2p + 5) < 0$, ha $p > -2,5$
- $x_1 \cdot x_2 = p^2 + 3p - 4 > 0$, ha $p < -4$ vagy $p > 1$.

Ezek egyszerre teljesülnek, ha $p > 1$.



KIDOLGOZOTT 10.

Határozza meg azokat a p valós paramétereket, amelyekre az alábbi egyenletnek két különböző pozitív gyöke van!

$$\frac{6p - 9}{x^2 + 3x} + \frac{x}{x^2 + x - 6} = \frac{p}{x^2 - 2x}$$

Alakítsuk szorzattá a nevezőket!

$$\frac{6p - 9}{x(x + 3)} + \frac{x}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{p}{x(x - 2)}$$

A feltétel, valamint a törtek értelmezése alapján
 $x > 0$ és $x \neq 2$.

$$\mathbf{K10.} \quad \frac{6p-9}{x(x+3)} + \frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{p}{x(x-2)}$$

Szorozzuk meg az egyenletet az $x(x-2)(x+3)$ szorzattal, majd rendezzük az x hatványai szerint:

$$x^2 + (5p-9)x + 18 - 15p = 0$$

A másodfokú egyenlet

- diszkriminánsa: $D = (5p-9)^2 - 4(18-15p) = 25p^2 - 30p + 9 = (5p-3)^2$,
- gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{9-5p \pm (5p-3)}{2} \begin{matrix} 3 \\ -5p+6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K10.} \quad x_{1,2} = \frac{9-5p \pm (5p-3)}{2} \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -5p+6 \end{matrix} \right.$$

Két különböző gyököt kapunk, ha

- $p \neq 0,6$. (Ezt a $D = (5p - 3)^2 > 0$ egyenlőtlenségből, vagy a $-5p + 6 \neq 3$ egyenletből kapjuk.)
- Továbbá, ha $-5p + 6 \neq 2$, mivel az eredeti egyenlet $x = 2$ -re nem értelmezett. Innen $p \neq 0,8$.
- Mindkét gyök pozitív, ha $-5p + 6 > 0$, azaz ha $p < 1,2$.

Tehát az egyenletnek két különböző pozitív gyöke van, ha $p \in]-\infty; 1,2[\setminus \{0,6; 0,8\}$

AJÁNLOTT 22.

Az m paraméter mely egész értékénél lesz a

$$9^x + 2(m + 3) \cdot 3^x + m^2 = 22$$

egyenletnek két különböző gyöke a valós számok halmazán? Adja meg a lehetséges gyökök számértékét is!

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1993.

A22. $9^x + 2(m + 3) \cdot 3^x + m^2 = 22$

Az egyenlet (3^x) –ben másodfokú. Legyen $y = 3^x$.

Az $f(x) = 3^x$ függvény szigorúan monoton nő, értékkészlete a pozitív számok halmaza, ezért az eredeti egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós gyöke, ha az

$$y^2 + 2(m + 3) \cdot y + m^2 - 22 = 0.$$

egyenletnek két különböző pozitív gyöke van.

A22. $y^2 + 2(m + 3) \cdot y + m^2 - 22 = 0$

A másodfokú egyenletnek akkor van két különböző pozitív gyöke, ha a következő három feltétel egyszerre teljesül:

a) a másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív:

$$D = 4(m + 3)^2 - 4(m^2 - 22) = 24m + 124.$$

$$D > 0, \text{ ha } m > -\frac{31}{6}$$

b) a gyökök összege pozitív: $y_1 + y_2 = -2(m + 3) > 0$,
ebből $m < -3$.

c) a gyökök szorzata pozitív: $y_1 \cdot y_2 = m^2 - 22 > 0$.

Ez teljesül, ha

$$m < -\sqrt{22} \quad \text{vagy} \quad m > \sqrt{22}$$

$$\mathbf{A22.} \quad 9^x + 2(m+3) \cdot 3^x + m^2 = 22$$

- Ezek mindegyike akkor áll fenn, ha

$$m \in \left] -\frac{31}{6}; -\sqrt{22} \right[.$$

Ez egyetlen egész számra teljesül:

$$m = -5.$$

- $m = -5$ esetén $y^2 - 4y + 3 = 0$
 $\Rightarrow y_1 = 1, \quad x_1 = 0; \quad y_2 = 3, \quad x_2 = 1.$
- Az egyenlet gyökei a 0 és az 1.

AJÁNLOTT 16.

Milyen határok között mozog a $p + q$ összeg értéke, ha p és q olyan valós számok, hogy az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek valós gyökei vannak, és az egyenlet gyökeire fennáll az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ összefüggés?

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1992.

A16. $x^2 + px + q = 0$ és $x_1^2 + x_2^2 = 1 \rightarrow p + q = ?$

- A másodfokú egyenletnek van valós gyöke, ha

$$p^2 - 4q \geq 0.$$

- A Viète formulákat alkalmazzuk:

$$1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q.$$

$$\text{Innen } q = \frac{p^2 - 1}{2}.$$

- A $p + q$ összeget kifejezzük p -vel:

$$p + q = p + \frac{p^2 - 1}{2} = \frac{p^2 + 2p - 1}{2} = \frac{1}{2}(p + 1)^2 - 1.$$

A 16. $p + q = \frac{1}{2}(p + 1)^2 - 1 ; \quad q = \frac{p^2 - 1}{2}$

Figyelembe kell venni a

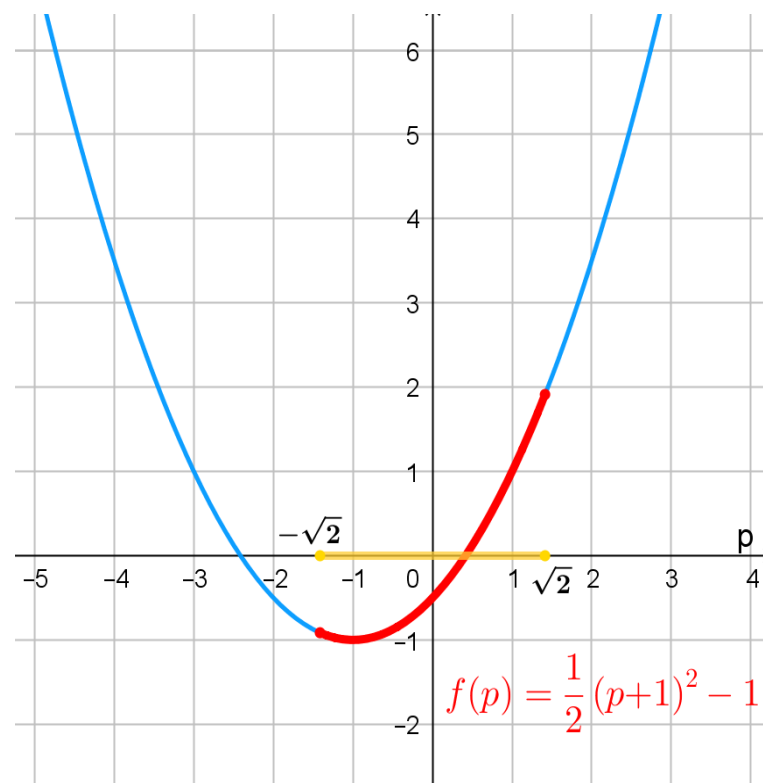
$$0 \leq p^2 - 4q = p^2 - 2p^2 + 2 = 2 - p^2 \text{ feltételt.}$$

$$p^2 \leq 2, \text{ ha } -\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}.$$

A $p + q$ összeg értékének vizsgálata egyenértékű az

$$f(p) = \frac{1}{2}(p + 1)^2 - 1,$$

$p \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ függvény
értékkészletének megadásával.



A16. $f(p) = \frac{1}{2}(p+1)^2 - 1; \quad p \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

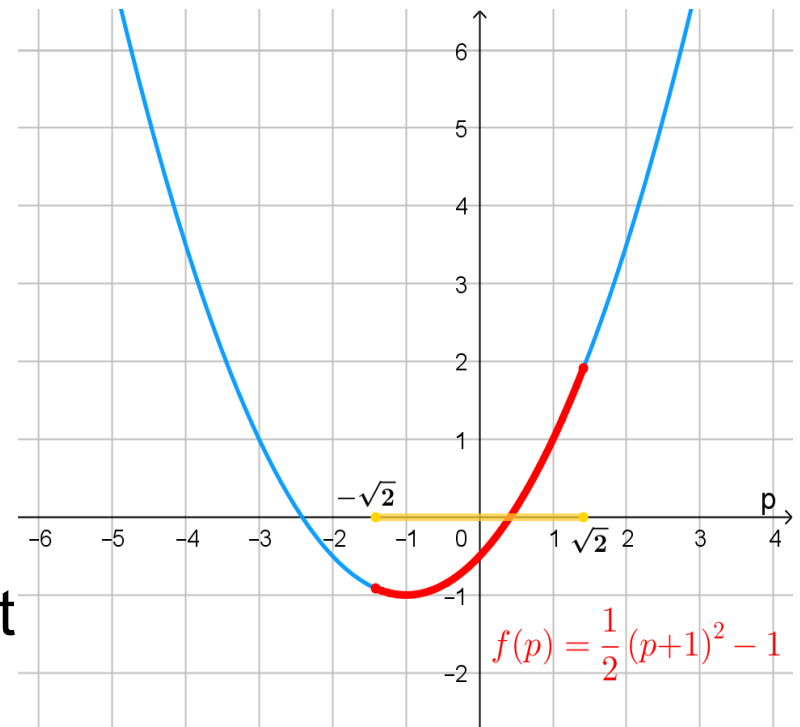
E függvénynek abszolút minimumhelye $p = -1$, minimuma $f(-1) = -1$, abszolút maximumhelye

$p = \sqrt{2}$, maximuma

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel a függvény folytonos, ezért

-1 és $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ között minden értéket felvesz.



KIDOLGOZOTT 4.

Mekkora az a valós szám, ha az

$$\frac{(a + 1)x - 2a - 1}{2ax - 4a + 5x - 7}$$

kifejezés x -től függetlenül állandó, ahol

$$2ax - 4a + 5x - 7 \neq 0?$$

Tegyük fel, hogy van ilyen a valós szám! Jelöljük a kifejezés értékét b -vel:

$$\frac{(a + 1)x - 2a - 1}{2ax - 4a + 5x - 7} = b$$

$$\text{K4. } \frac{(a+1)x-2a-1}{2ax-4a+5x-7} = b$$

Szorozzuk mindkét oldalt a 0-tól különböző nevezővel!

$$(a+1)x - 2a - 1 = 2abx - 4ab + 5bx - 7b$$

Rendezzük át az egyenletet!

$$(a+1-2ab-5b)x = 2a+1-4ab-7b$$

Ez tetszőleges x -re pontosan akkor áll fenn, ha

$$a+1-2ab-5b=0 \quad \text{és}$$

$$2a+1-4ab-7b=0$$

A első egyenlet kétszereséből kivonjuk a másodikat:

$$1-3b=0.$$

$$\text{K4.} \quad \frac{(a+1)x-2a-1}{2ax-4a+5x-7}$$

Innen $b = \frac{1}{3}$, valamint az $a + 1 - 2ab - 5b = 0$ egyenletből

$$a = \frac{5b-1}{1-2b} = \frac{\frac{5}{3}-1}{1-\frac{2}{3}} = 2.$$

Tehát ha van ilyen a szám, az csak a 2 lehet.

Behelyettesítjük $a = 2$ -t az eredeti kifejezésbe:

$$\frac{(a+1)x-2a-1}{2ax-4a+5x-7} = \frac{3x-5}{9x-15} = \frac{1}{3}.$$

Tehát a keresett paraméter értéke: 2.

K4. II. Megoldás

Mekkora az a valós szám, ha az

$$\frac{(a+1)x - 2a - 1}{2ax - 4a + 5x - 7}$$

kifejezés x -től függetlenül állandó, ahol

$$2ax - 4a + 5x - 7 \neq 0?$$

Ha a kifejezés értéke minden x -re ugyanaz a konstans, akkor két különböző x behelyettesítésével nyert értékek egyenlők.

$$\text{K4.} \quad \frac{(a+1)x-2a-1}{2ax-4a+5x-7}$$

$x = 0$ és $x = 1$ érték behelyettesítésével az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{-2a-1}{-4a-7} = \frac{-a}{-2a-2} \quad \left(a \neq -\frac{7}{4}, a \neq -1 \right)$$

Ebből $4a^2 + 6a + 2 = 4a^2 + 7a$, ahonnan $a = 2$.

$a = 2$ esetén a kifejezés értéke valóban állandó $\left(\frac{1}{3}\right)$.

A konstans azonnal megkapjuk, ha x helyére 2-t helyettesítünk. Ekkor is igazolni kell, hogy x más értékeire is ugyanaz a tört értéke.

AJÁNLOTT 18.

A c valós paraméter mely értékeire lesz a

$$6x^4 - 5x^3 + cx^2 - 5x + 6 = 0$$

egyenletnek négy különböző valós gyöke?

A 0 nem gyöke az egyenletnek, ezért x^2 -tel osztással az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk:

$$6x^2 - 5x + c - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0.$$

Rendezzük át! $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$

A18. $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$

Legyen $y = x + \frac{1}{x}$. Ezzel $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, és egyenletünk

$$6y^2 - 5y + c - 12 = 0.$$

Ismert, hogy minden 0-tól különböző x -re $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$,

és az $x + \frac{1}{x} = 2$ egyenletnek csak az 1,

az $x + \frac{1}{x} = -2$ egyenletnek csak a -1 a gyöke.

$|y| > 2$ esetén az $x + \frac{1}{x} = y$ egyenletnek két különböző megoldása van.

Ezért az eredeti negyedfokú egyenletnek pontosan akkor van négy különböző valós gyöke, ha az

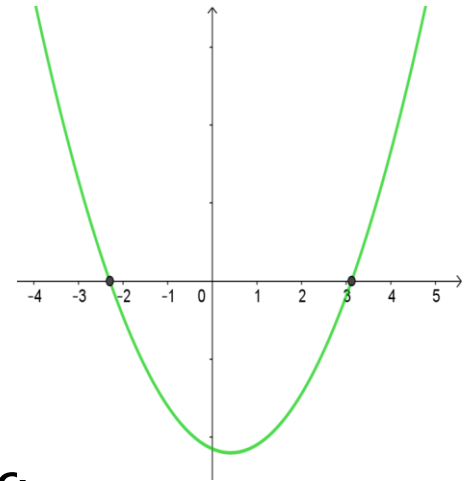
$f(y) = 6y^2 - 5y + c - 12$ függvénynek két 2-nél nagyobb abszolútértékű zérushelye van.

$$\mathbf{A18.} \quad f(y) = 6y^2 - 5y + c - 12$$

$6y^2 - 5y + c - 12 = 0$ gyökei:

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24(c - 12)}}{12} = \frac{5}{12} \pm \frac{\sqrt{D}}{12}$$

$$(D > 0, \text{ ha } c < \frac{313}{12})$$

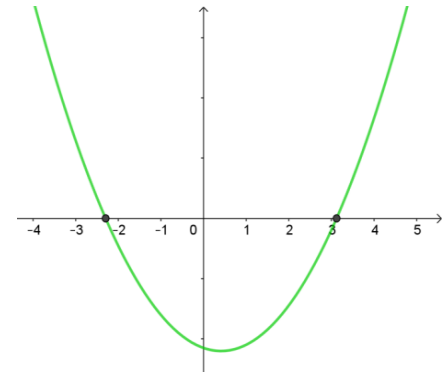


A másodfokú függvény zérushelyei az $\frac{5}{12}$ -re szimmetrikusak, ezért nem lehet a kisebbik gyök 2-nél nagyobb és a nagyobbik se lehet -2 -nél kisebb.

Tehát az abszolútértékük pontosan akkor nagyobb 2-nél, ha a kisebbik -2 -nél kisebb, a nagyobbik 2-nél nagyobb.

A18. $f(y) = 6y^2 - 5y + c - 12$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha
 $f(-2) < 0$ és $f(2) < 0$.



$$f(-2) = 24 + 10 + c - 12 < 0 \Leftrightarrow c < -22$$

$$f(2) = 24 - 10 + c - 12 < 0 \Leftrightarrow c < -2$$

Tehát a negyedfokú egyenletnek négy különböző valós gyöke van, ha $c < -22$.

AJÁNLOTT 17.

Adottak az alábbi egyenletek:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

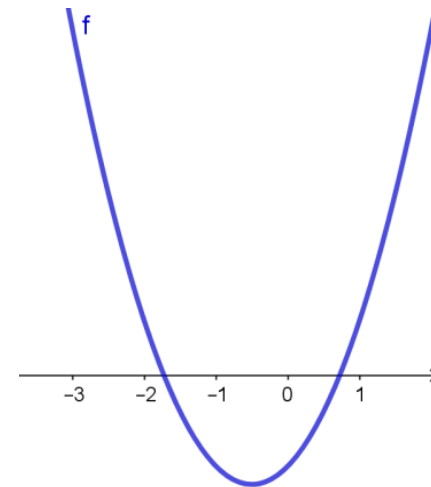
$$\frac{1}{x+2} + \frac{p}{x+1} + \frac{q}{x} = 0 \quad (2)$$

Bizonyítsuk be, hogy ha mindkét egyenletnek két valós gyöke van és az (1) egyenletnek pontosan egy gyöke van a $]0; 1[$ intervallumban, akkor a (2) egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív.

A17. $x^2 + px + q = 0 \quad (1)$

A feltétel szerint az (1) egyenletnek két valós gyöke van, ezért az $f(x) = x^2 + px + q$ függvény grafikonja metszi az x tengelyt, s mivel a $]0; 1[$ intervallumba közülük csak az egyik esik, ezért

$$f(0) \cdot f(1) < 0, \text{ azaz} \\ q(1 + p + q) < 0.$$



$$\text{A17.} \quad \frac{1}{x+2} + \frac{p}{x+1} + \frac{q}{x} = 0 \quad (2)$$

ahol $q(1 + p + q) < 0$.

A (2) egyenlet nem értelmezett, ha $x \in \{-2; -1; 0\}$.

Az egyenletet szorozzuk a nevezőkkel.

$$x(x + 1) + p(x + 2)x + q(x + 2)(x + 1) = 0$$

A rendezés után kapott

$$(1 + p + q)x^2 + (1 + 2p + 3q)x + 2q = 0$$

egyenlet másodfokú, valamint (az egyébként is kizárt) 0 nem gyöke.

Így ennek a másodfokú egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív, ha a másik gyöke negatív.

$$\text{A17} \quad (1 + p + q)x^2 + (1 + 2p + 3q)x + 2q = 0$$

ahol $q(1 + p + q) < 0$.

Ez akkor és csak akkor áll fenn, ha a gyökök szorzata negatív.
A Viète formulák szerint

$$x_1 x_2 = \frac{2q}{(1+p+q)}.$$

E tört számlálója és nevezője a feltételből levezetett

$$q(1 + p + q) < 0$$

egyenlőtlenség szerint ellentétes előjelű.

Tehát a (2) egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív.

ERDŐS PÁL MEGOLDÁSA:

526. Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$f(x) \equiv x^2 + px + q = 0$$

egyenletnek egyik gyöke 0 és 1 között van, akkor a

$$g(x) \equiv \frac{1}{x+2} + \frac{p}{x+1} + \frac{q}{x} = 0$$

egyenletnek egy és csakis egy pozitív gyöke van.

Vitéz Berend Iván tanár Szeged.

Megoldás. Ha az $f(x) = 0$ egyenletnek egyik gyöke 0 és 1 között van, akkor $f(0)$ és $f(1)$ ellenkező előjelűek:

$$f(0) = q, f(1) = 1 + p + q \text{ tehát } q(1 + p + q) < 0 \dots \quad 1)$$

A $g(x) = 0$ egyenlet gyökeit megadja az

$$x(x+1) + px(x+2) + q(x+2)(x+1) = 0$$

egyenlet, melyet rendezve:

$$(1 + p + q)x^2 + (1 + 2p + 3q)x + 2q = 0 \dots \quad 2)$$

A 2) egyenlet gyökeinek szorzata: $\frac{2q}{1 + p + q} < 0$,

I 49

mert 1) szerint $q(1 + p + q) < 0$. Ebből következik, hogy a 2) egyenlet gyökei valósak (s ellenkező előjelűek, tehát a $g(x) = 0$ egyenletnek egy és csakis egy pozitív gyöke van.

Erdős Pál (Szent-István rg. VIII. o. Bp.)

Megoldották: Alpár L., Barok Gy., Déman P., Ernst F., Farkas I., Feldheim E., Grünwald T., Hapka I., Jancsek J., Kolhányi F., Kövesdi D., Lázár D., Papp Gy., Sámuel J., Scheibner K., Soos G., Straubert J., Szekaszián Rózsa, Weisz F.

AJÁNLOTT 12.

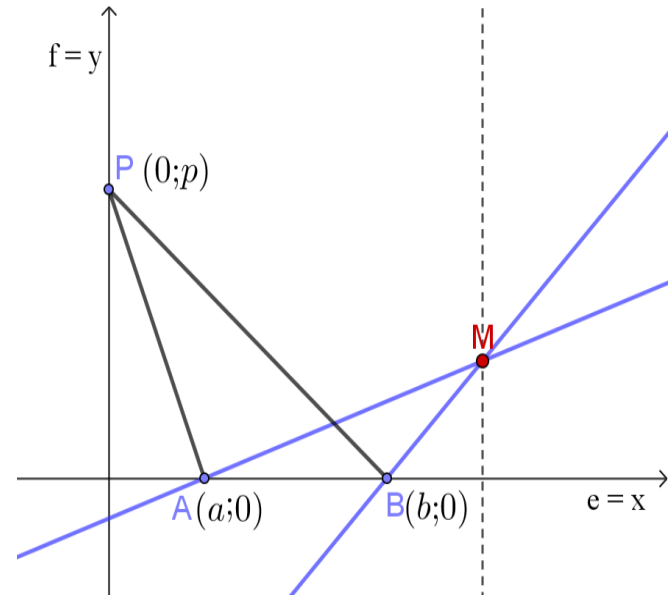
Adva van a síkban két egymásra merőleges egyenes e és f , és az e egyenesen két pont A és B . Az f egyenes egy tetszőleges P pontját az adott pontokkal összekötő egyenesekre emeljünk az A és B pontokban merőlegeseket.

Mi a mértani helye a merőlegesek M metszéspontjainak, ha a P pont végigfut az f egyenesen?

*25. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 2016.március; 10. osztály
KöMaL 1955. november, 657. feladat*

A12.

Válasszuk a koordináta-rendszer x tengelyének az e egyenest, y tengelyének az f egyenest. Az A pont koordinátái: $(a; 0)$, a B ponté: $(b; 0)$, a P ponté: $(0; p)$.



Ha a vagy b valamelyike, pl. $a = 0$ (azaz A éppen a két adott egyenes metszéspontja), akkor a kérdéses mértani hely egyetlen pont, a B pont lesz. $p = 0$ esetén a két egyenes párhuzamos.

Tegyük fel, hogy a , b és p egyike sem 0.

A12.

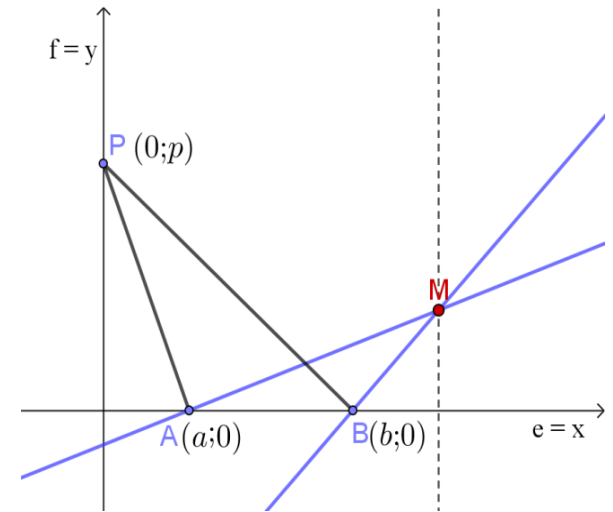
Az AP egyenes iránytangense: $-\frac{p}{a}$;

a BP egyenes iránytangense: $-\frac{p}{b}$,

az ezekre merőleges egyenesek
iránytangensei $\frac{a}{p}$, illetve $\frac{b}{p}$.

Ezért az A pontban AP-re emelt
merőleges és a B pontban BP-re emelt
merőleges egyenesek egyenletei:

$$y = \frac{a}{p}(x - a), \quad \text{valamint} \quad y = \frac{b}{p}(x - b).$$



A12. $y = \frac{a}{p}(x - a), \quad y = \frac{b}{p}(x - b)$

Az egyenletrendszer megoldása M pont két koordinátája:

$$a(x - a) = b(x - b)$$

$$x(a - b) = a^2 - b^2$$

A és B két különböző pont, ezért oszthatunk $(a - b)$ -vel.

Így

$$x = a + b \quad \text{és} \quad y = \frac{ab}{p}.$$

$$\text{A12.} \quad x = a + b \quad \text{és} \quad y = \frac{ab}{p}$$

p minden megengedett értékéhez ($p = 0$ -t kizártuk), tartozik egy M pont. Mivel x p -től független, az M pontok egy, az y tengellyel párhuzamos egyenesre illeszkednek, amelynek egyenlete

$$x = a + b.$$

Meg kell még vizsgálni, hogy a fenti egyenletrendszerrel jellemzett egyenes minden pontja hozzátartozik-e a mértani helyhez.

Mivel $ab \neq 0$, ezért az $(a + b; 0)$ pont nem tartozik a mértani helyhez.

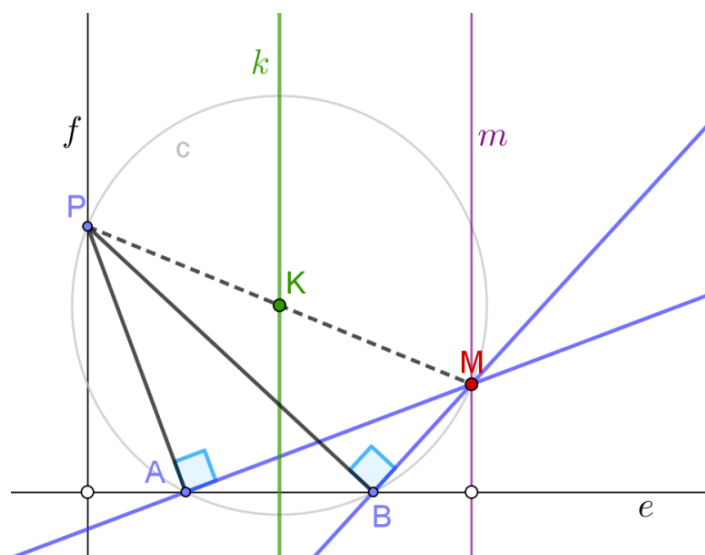
A12.

Az $x = a + b$ egyenes minden más $\left(a + b ; \frac{ab}{p}\right)$ pontjához tartozik egy $p \left(= \frac{ab}{y}\right)$ érték ($y \neq 0$), ezzel együtt tartozik egy P pont is az y tengelynek választott f egyenesen.

A keresett ponthalmaz egy „lyukas” egyenes, amelynek egyenlete: $x = a + b$.

Ez, az f egyenesnek az AB szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe.

A12. másként



Az A és B pontokból az PM szakasz derékszögben látszik, ezért A és B pontok a PM szakasz Thalész körére illeszkednek. A kör középpontja PM szakasz K felezőpontja. A kör húrja AB , így K az AB szakasz k felezőmerőlegesén van. ($k \parallel f$).

Az M pont a P pontnak a k egyenesen mozgó K pontra vonatkozó tükörképe, vagyis az M pontok mértani helye az f (lyukas) egyenesnek a k egyenesre vonatkozó tükörképe.

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE