

TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN:

Segédanyagok középiskolai tanárok számára

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE

Összeállította: Nagyné Pálmay Piroska

Kőbányai Szent László Gimnázium

Időpont: 2019. november 15. péntek, 10⁰⁰ – 14³⁰ óra

Helyszín: PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN:

Segédanyagok középiskolai tanárok számára

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE, 2019

Paraméteres egyenletek

TARTALOMJEGYZÉK:

I. Bevezetés	2. oldal
II. Kidolgozott feladatok	2. oldal
III. Ajánlott feladatok	17. oldal
IV. Az ajánlott feladatok megoldásai	22. oldal

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Paraméteres egyenletek

I. Bevezetés

1. Középiskolai tanulmányaink során nagyon sok, konkrét adatokat tartalmazó feladattal kell megbirkóznunk. Ha egyik-másik adatot betűs kifejezéssel cserélünk ki, az eredeti feladat egyfajta általánosítását kapjuk. Ezek gyakran olyan összefüggésekre világítanak rá, amelyeket a konkrét feladat megoldásakor nehéz felfedezni. A legtöbb tanult képlet is ebbe a kategóriába esik.

A bevezetett betűt **paraméternek** nevezzük.

2. A feladatsorban sokféle kérdéssel találkozunk, amelyekre a válasz a paraméter értékétől függ. A paramétert tartalmazó feladatok egy jelentős része a legfeljebb másodfokú egyenletek vizsgálatára vezet.
3. Találkozhatunk olyan feladatokkal is, amelyekben nem szerepelnek paraméterek, de a probléma megoldásához célszerű paramétert bevezetni és a feladatot paraméteres egyenlet vagy egyenlőtlenség megoldására visszavezetni.

Az összeállítás két fő részből áll. A **Kidolgozott feladatokban** néhány tipikus példát mutatunk a paraméterek alkalmazására. Az **Ajánlott feladatok** fejezetben az ismeretek elmélyítése mellett érdekesebb, nehezebb feladatokkal is találkozhatunk. A III. fejezetben ez a 30 feladat egy feladatsorban található. A IV. fejezetben tanulmányozhatók a feladatok egy-egy lehetséges megoldása.

II. Kidolgozott feladatok

1. Oldja meg az $\frac{a^2x+20}{5a+2x} = 2$ egyenletet a valós számok halmazán, ha a valós paraméter!

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, ezért $x \neq -2,5a$.

E feltétellel az eredetivel ekvivalens egyenlet: $a^2x + 20 = 2(5a + 2x)$. x -re rendezve kapjuk:

$$(a^2 - 4)x = 10a - 20.$$

$$(a - 2)(a + 2)x = 10(a - 2)$$

$a = -2$ esetén egyenletünk $0 \cdot x = -40$, aminek nincs megoldása.

$a = 2$ esetén egyenletünk $0 \cdot x = 0$. Ennek minden szóba jöhető szám megoldása.

A tört értelmezési tartományát figyelembe véve $x \neq -5$.

Ha $a \neq 2$ és $a \neq -2$, akkor $x = \frac{10}{a+2}$. A kikötést figyelembe véve

$$\frac{10}{a+2} \neq -2,5a.$$

Ebből $a^2 + 2a + 4 \neq 0$. Ez teljesül minden a -ra, mivel $a^2 + 2a + 4 = (a + 1)^2 + 3 > 0$.

Összefoglalva:

az a paraméter	a megoldáshalmaz
$a = -2$	$\{ \}$
$a = 2$	$\mathbb{R} \setminus \{-5\}$
$a \neq 2$ és $a \neq -2$	$\left\{ \frac{10}{a+2} \right\}$

2. Igazoljuk, hogy az

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ -2x + y - 2z &= -2 \\ 2x + cy + 3z &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek van olyan megoldása, ami nem függ a c paraméter értékétől!

KöMaL 2009. szeptember, C. 995

Megoldás:

Az I. és a II. egyenlet összeadásából $x = 2$. Ezt a II. és a III. egyenletbe helyettesítjük:

$$\begin{aligned} y - 2z &= 2 \\ cy + 3z &= -3 \end{aligned}$$

Az első 3-mal, a másodikat 2-vel szorozzuk, majd az így kapott két egyenletet összeadjuk. y kiemelése után kapjuk:

$$(2c + 3)y = 0$$

Ennek a megoldása c -től független, ha $y = 0$. Ekkor $z = -1$.

Tehát van az egyenletrendszernek c -től független megoldása, mégpedig a $(2; 0; -1)$. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a $(2; 0; -1)$ számhármass az egyenletrendszer megoldása.

Megjegyzés:

A három egyenlet közül csak a harmadikban szerepel a c paraméter. Ha $y = 0$, akkor ez az egyenlet is független c -től. $y = 0 - t$ visszahelyettesítve az első két egyenletbe, megkapjuk: $x = 2$ és $z = -1$.

3. Vizsgáljuk meg, hogyan függ a paraméter értékétől a következő egyenletek megoldásainak a száma!

a) $||x - 2| - 3| - 4| = a$

b) $|3x - 4| + |x + 1| = -2x + b$

c) $x^2 - 4|x| + 3 = c$

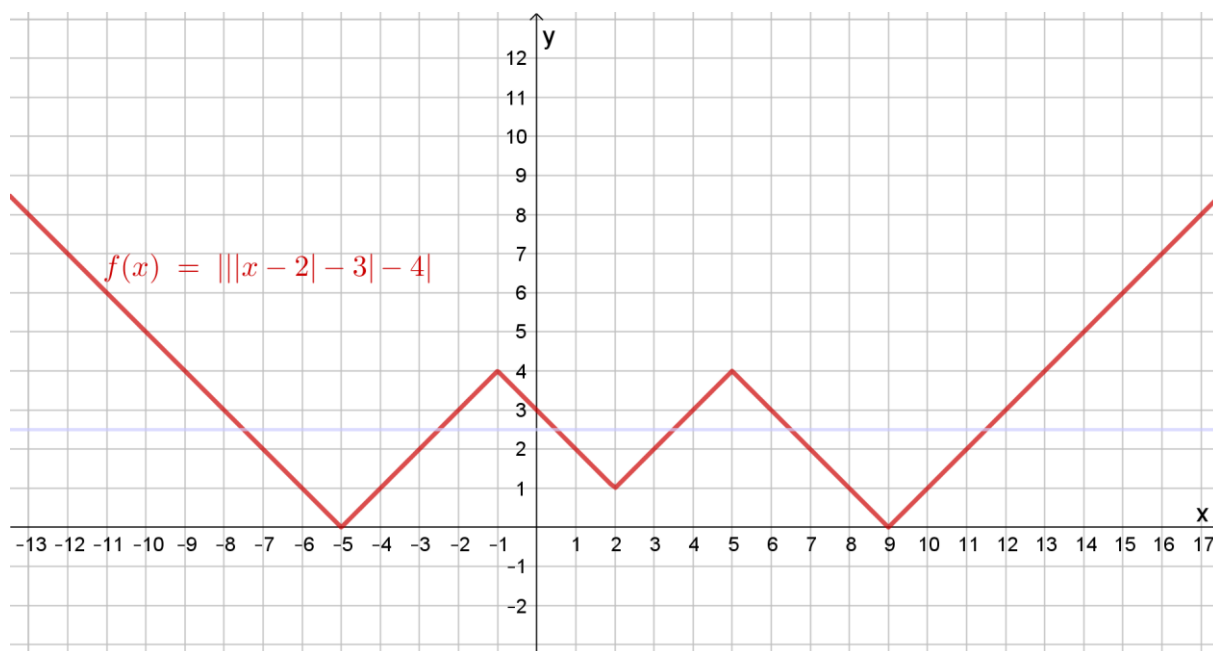
d) $|x^2 - 4|x| + 3| = d$

e)

Megoldás:

A megoldáshoz egy koordinátarendszerben ábrázoljuk az egyenletek mindkét oldalát x függvényeként, majd a grafikonokról leolvassuk a közös pontok számát.

- a) Az $f(x) = ||x - 2| - 3| - 4|$ függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a nem negatív valós számok halmaza.



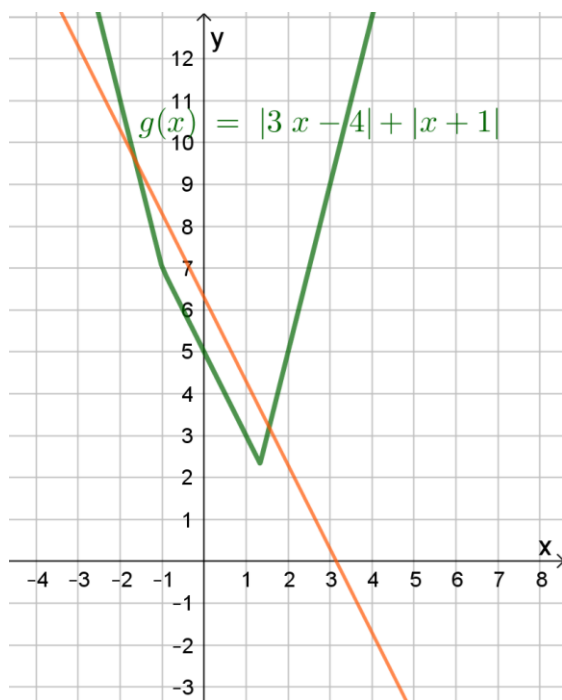
A grafikonról leolvasható a megoldások száma. Például $a = 2,5$ esetén az $y = 2,5$ egyenes és az f függvény grafikonjának 6 közös pontja van.

az a paraméter	a megoldások száma
$a < 0$	0
$a = 0$	2
$0 < a < 1$	4
$a = 1$	5
$1 < a < 4$	6
$a = 4$	4
$4 < a$	2

- b) A $g(x) = |3x - 4| + |x + 1|$ függvény hozzárendelési szabálya intervallumonként:

	$x \leq -1$	$-1 \leq x \leq \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} \leq x$
$ 3x - 4 =$	$4 - 3x$	$4 - 3x$	$3x - 4$
$ x + 1 =$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$
$g(x) =$	$-4x + 3$	$-2x + 5$	$4x - 3$

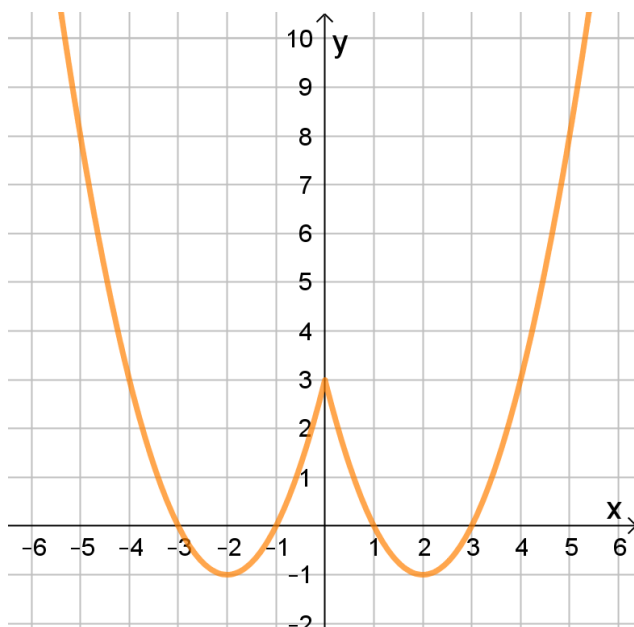
A g függvény grafikonjának és a -2 meredekségű egyenesek közös pontjai számát keressük. Például $b = 6,3$ esetén az $y = -2x + 6,3$ egyenes és g függvény grafikonjának két közös pontja van.



a b paraméter	$ 3x - 4 + x + 1 = -2x + b$ egyenlet megoldásainak száma
$b < 5$	0
$b = 5$	végtelen sok
$b > 5$	2

c)

$$x^2 - 4|x| + 3 = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

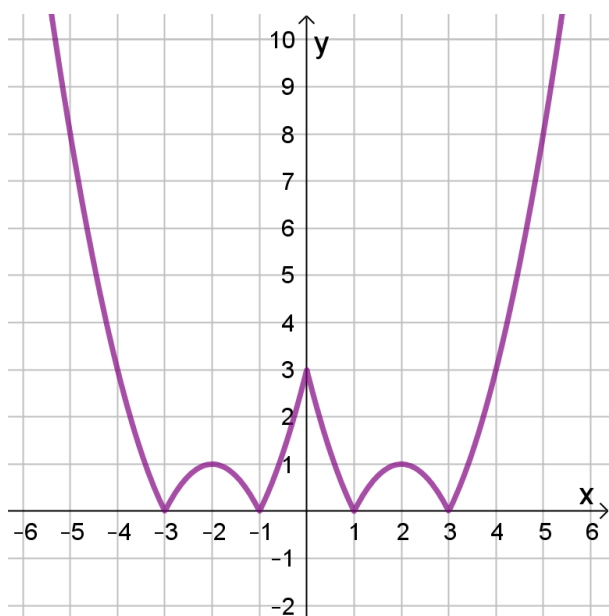


A $h(x) = x^2 - 4|x| + 3$ páros függvény értékkészlete a $[-1; +\infty[$.

a c paraméter	$x^2 - 4 x + 3 = c$ egyenlet megoldásainak száma
$c < -1$	0
$c = -1$	2
$-1 < c < 3$	4
$c = 3$	3
$c > 3$	2

d) $k(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ függvény a c) feladatbeli h függvény abszolút értéke. $k(x) = \begin{cases} h(x), & \text{ha } h(x) \geq 0 \\ -h(x), & \text{ha } h(x) < 0 \end{cases}$

(Tehát a k függvény grafikonja azonos a h grafikonjával ott, ahol h nem negatív értéket vesz fel, valamint a h függvény grafikonjának x tengely alatti részét az x tengelyre tükrözzük.)



a d paraméter	$ x^2 - 4 x + 3 = d$ egyenlet megoldásainak száma
$d < 0$	0
$d = 0$	4
$0 < d < 1$	8
$d = 1$	6
$1 < d < 3$	4
$d = 3$	3
$d > 3$	2

4. Mekkora az a valós szám, ha az

$$\frac{(a+1)x - 2a - 1}{2ax - 4a + 5x - 7}$$

kifejezés x -től függetlenül állandó, ahol $2ax - 4a + 5x - 7 \neq 0$?

I. Megoldás:

Tegyük fel, hogy van ilyen a valós szám! Jelöljük a kifejezés értékét b -vel:

$$\frac{(a+1)x - 2a - 1}{2ax - 4a + 5x - 7} = b$$

Szorozzuk mindkét oldalt a 0-tól különböző nevezővel!

$$(a+1)x - 2a - 1 = 2abx - 4ab + 5bx - 7b$$

Rendezzük át az egyenletet!

$$(a+1-2ab-5b)x = 2a+1-4ab-7b$$

Ez tetszőleges x -re pontosan akkor áll fenn, ha

$$a + 1 - 2ab - 5b = 0 \quad \text{és}$$

$$2a + 1 - 4ab - 7b = 0$$

A első egyenlet kétszereséből kivonjuk a másodikat:

$$1 - 3b = 0.$$

Innen $b = \frac{1}{3}$, valamint az $a + 1 - 2ab - 5b = 0$ egyenletből $a = \frac{5b-1}{1-2b} = \frac{\frac{5}{3}-1}{1-\frac{2}{3}} = 2$.

Tehát ha van ilyen a szám, az csak a 2 lehet.

Behelyettesítjük $a = 2$ -t az eredeti kifejezésbe:

$$\frac{(a+1)x - 2a - 1}{2ax - 4a + 5x - 7} = \frac{3x - 5}{9x - 15} = \frac{1}{3}.$$

Tehát a keresett paraméter értéke: 2.

II. Megoldás:

Ha a kifejezés értéke minden x -re ugyanaz a konstans, akkor két különböző x behelyettesítésével nyert értékek egyenlők. $x = 0$ és $x = 1$ érték behelyettesítésével az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{-2a - 1}{-4a - 7} = \frac{-a}{-2a - 2} \quad \left(a \neq -\frac{7}{4}, a \neq -1 \right)$$

Ebből $4a^2 + 6a + 2 = 4a^2 + 7a$, ahonnan $a = 2$.

$a = 2$ esetén a kifejezés értéke valóban állandó $\left(\frac{1}{3}\right)$.

Megjegyzés:

- Ugyanezt kapjuk, ha másik két értéket helyettesítünk be, akár általánosan két különböző x_1 -et és x_2 -t (amelyekre a nevező nullától különböző szám). Az egyenlet rendezésével $a(x_1 - x_2) = 2(x_1 - x_2)$ -hez jutunk amiből $a = 2$.
- A konstans azonnal megkapjuk, ha x helyére 2-t helyettesítünk. Ekkor is igazolni kell, hogy x más értékeire is ugyanaz a tört értéke.)

5. Adott az $2x^2 - 22x + p = 0$ egyenlet.

- Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy egyik gyöke a -5 legyen. Adja meg az egyenlet másik gyökét is!
- Határozza meg a p paraméter értékét, ha az egyenlet két valós gyökének különbsége 5.
- A p paraméter mely értékeire lesz az egyenlet két valós gyökének négyzetösszege 65?

Megoldás:

a) I. Az egyenlet egyik gyöke -5 , ezért $2 \cdot (-5)^2 - 22 \cdot (-5) + p = 0$. Ebből $p = -160$.

A $2x^2 - 22x - 160 = 0$ egyenlet gyökei. -5 és 16 , tehát az egyenlet másik gyöke 16 .

II. A Viète formulák szerint $-5 + x_2 = 11 \Rightarrow x_2 = 16$ és

$$(-5) \cdot 16 = \frac{p}{2} \Rightarrow p = -160$$

b) A feltétel szerint: $x_1 - x_2 = 5$ (I.)

Alkalmazzuk a Viète formulákat! $x_1 + x_2 = 11$ (II.) és

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p}{2} \quad \text{(III.)}$$

Az I. és II. egyenletből $x_1 = 8$ és $x_2 = 3$. A III. egyenletből kapjuk: $p = 48$.

c) Ismét a Viète formulákat alkalmazzuk.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 121 - p$$

A feltétel szerint $121 - p = 65$. Innen $p = 56$.

Ellenőrzés: $2x^2 - 22x + 56 = 0$ egyenlet gyökei 4 és 7 . Ezekre $4^2 + 7^2 = 65$ teljesül.

Megjegyzések:

- Nem hagyható el a visszahelyettesítés, mert abból, hogy egy $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ másodfokú egyenlet együtthatóival számított $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}$ kifejezés értéke pozitív, nem következik, hogy az egyenletnek van valós gyöke. (Pl.: az $x^2 - 4x + 7 = 0$ egyenletre a fenti kifejezés értéke, $16 - 14 = 2$, mégsem igaz, hogy az egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege 2 , mert az egyenletnek nincs valós gyöke, hiszen a diszkriminánsa negatív.)
- A megoldás elején is megvizsgálhattuk volna, hogy milyen feltétel esetén van az egyenletnek valós gyöke. $D \geq 0$, ha $22^2 - 8p \geq 0$. Ez teljesül, ha $p \leq 60,5$. A kapott $p = 56$ érték ennek megfelel.

6. A p valós paraméter mely értékeire van a $(p - 1)x^2 + 2px + 4 + p = 0$ egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke?

Megoldás:

$p = 1$ esetén a $2x + 5 = 0$ elsőfokú egyenletnek egy valós gyöke van ($x = -2,5$).

$p \neq 1$ esetén az egyenlet másodfokú. Ennek pontosan akkor van legfeljebb egy valós gyöke, ha a diszkriminánsa nem pozitív.

$$\begin{aligned} D &= 4p^2 - 4(p - 1)(4 + p) \leq 0 \\ 4p^2 - 4p^2 - 12p + 16 &\leq 0 \\ p &\geq \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Tehát az egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke van, ha $p = 1$ vagy $p \geq \frac{4}{3}$.

7. Határozza meg a p paraméter mindazon értékeit, amelyekre az x minden valós értékére

$$\frac{x^2 + 8x + 20}{px^2 + 2(p+1)x + 9p + 4} < 0.$$

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1998.

Megoldás:

A számláló minden x -re pozitív, mert $x^2 + 8x + 20 = (x + 4)^2 + 4 \geq 4$.

Ezért a tört értéke pontosan akkor negatív, ha a nevező negatív.

$$px^2 + 2(p+1)x + 9p + 4 < 0$$

$p = 0$ esetén $2x + 4 < 0$ nem teljesül minden számra.

$p \neq 0$ esetén a másodfokú egyenlőtlenségnek akkor és csak akkor megoldása minden valós szám, ha a bal oldalon álló $y = px^2 + 2(p+1)x + 9p + 4$ parabola lefelé nyitott és az x tengellyel nincs közös pontja, azaz, ha $p < 0$ és $D < 0$.

$$D = 4(p+1)^2 - 4p(9p+4) = 4p^2 + 8p + 4 - 36p^2 - 16p = -32p^2 - 8p + 4$$

$$-32p^2 - 8p + 4 = 0 \text{ gyökei: } p_1 = -\frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{4}.$$

$$-32p^2 - 8p + 4 < 0, \text{ ha } p < -\frac{1}{2} \text{ vagy } p > \frac{1}{4}.$$

A $p < 0$ feltételt is figyelembe vesszük, így $p < -\frac{1}{2}$ esetén lesz a tört értéke minden x valós számra negatív.

8. Határozza meg p értékét úgy, hogy az $x^2 + (2p+5)x + p^2 + 3p - 4 = 0$ egyenletnek

- a) ne legyen valós gyöke;
- b) két egyenlő valós gyöke legyen (egy valós gyöke legyen);
- c) gyöke legyen a 0;
- d) két különböző pozitív gyöke legyen;
- e) egy pozitív és egy negatív gyöke legyen;
- f) két különböző negatív gyöke legyen!

Megoldás:

A megoldásokhoz szükségünk lesz a másodfokú egyenlet diszkriminánsára.

$$D = (2p+5)^2 - 4(p^2 + 3p - 4) = 8p + 41$$

- a) Az egyenletnek nincs valós gyöke, ha $D < 0$. Ez $p < -\frac{41}{8} = -5,125$ esetén teljesül.
- b) Egy valós gyöke van, ha $D = 0$, azaz, ha $p = -5,125$.

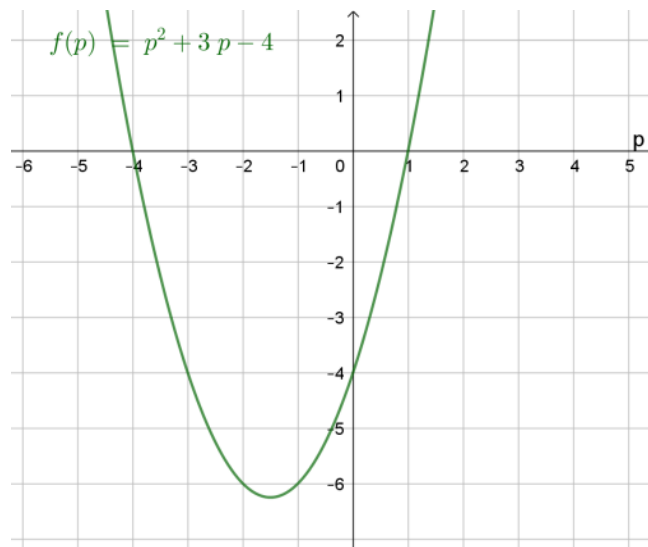
- c) Az egyenlet az $x = 0$ értékre teljesül, ezért ezt behelyettesítve a $p^2 + 3p - 4 = 0$ összefüggést kapjuk. Ez akkor igaz, ha $p = -4$ vagy ha $p = 1$.
- d) Egy másodfokú egyenletnek két különböző pozitív valós gyöke van, ha a diszkriminánsa pozitív, valamint a gyökök összege és szorzata is pozitív.

$$D > 0, \text{ ha } p > -5,125 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 = -(2p + 5) > 0, \text{ ha } p < -2,5 \quad (2)$$

$$x_1 \cdot x_2 = p^2 + 3p - 4 > 0, \text{ ha } p < -4 \text{ vagy } p > 1. \quad (3)$$

(A (3) feltétel megoldása az alábbi grafiknról leolvasható.)

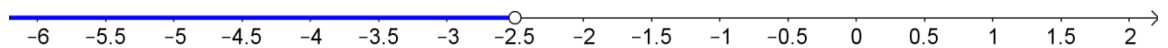


Számegyenesen:

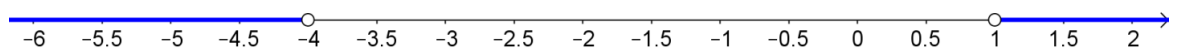
(1)



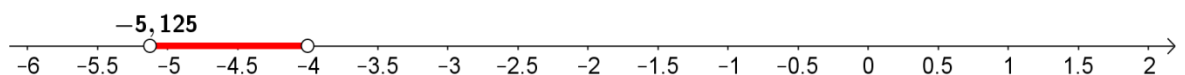
(2)



(3)



Az egyenlőtlenségrendszer megoldása: $-5,125 < p < -4$.



A másodfokú egyenletnek két különböző pozitív gyöke van, ha $-5,125 < p < -4$.

- e) Ha az $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ egyenletnek két különböző előjelű valós gyöke van, akkor a gyökök szorzata negatív.

Elég csak ezt vizsgálni, mert ha ez teljesül, akkor az egyenlet gyökei valósak, hiszen, ha $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$, akkor $a \cdot c$ is negatív és így $D = b^2 - 4ac$ biztosan pozitív.

A feladatunkban $x_1 \cdot x_2 = p^2 + 3p - 4 < 0$. A megoldás leolvasható a d)-ben ábrázolt grafikonról: $-4 < p < 1$.

- f) Az egyenletnek két különböző negatív gyöke van, ha a diszkriminánsa pozitív, valamint a gyökök összege negatív és a szorzatuk pozitív.

$$D > 0, \text{ ha } p > -5,125$$

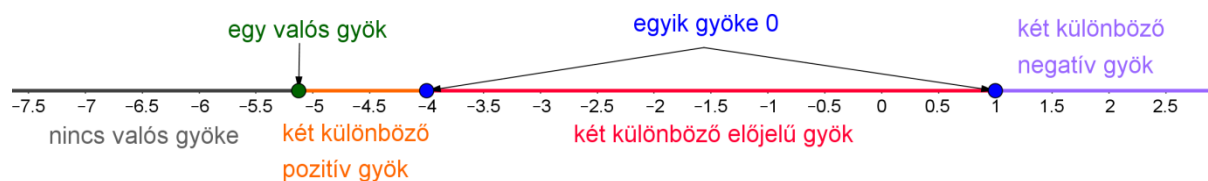
$$x_1 + x_2 = -(2p + 5) < 0, \text{ ha } p > -2,5$$

$$x_1 \cdot x_2 = p^2 + 3p - 4 > 0, \text{ ha } p < -4 \text{ vagy } p > 1.$$

Ezek egyszerre teljesülnek, ha $p > 1$.

Megjegyzés:

Érdemes megfigyelni a fenti eseteket számegyenesen ábrázolva.



9. a) Oldja meg az $\frac{x^2+5x}{x^2-x-30} = p$ egyenletet a racionális számok halmazán, ahol p egész paraméter!
b) p mely egész értékeire lesz az egyenlet gyöke egész szám?

Megoldás:

- a) $x^2 - x - 30 \neq 0$, azaz $x = -5$ -re és $x = 6$ -ra az egyenlet nem értelmezett.

Szorozzunk a nevezővel és rendezzük az egyenletet x hatványai szerint.

$$x^2 + 5x = p \cdot (x^2 - x - 30)$$

$$(p - 1) \cdot x^2 - (p + 5) \cdot x - 30p = 0$$

Ha $p = 1$, akkor $-6x - 30 = 0 \Leftrightarrow x = -5$. Ezt kizártuk, így $p = 1$ esetén nincs megoldás.

Ha $p \neq 1$, akkor a másodfokú egyenlet diszkriminánsa:

$$D = (p + 5)^2 + 120p(p - 1) = 121p^2 - 110p + 25 = (11p - 5)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{p + 5 \pm (11p - 5)}{2(p - 1)}, \quad x_1 = \frac{6p}{p - 1}, \quad x_2 = -5.$$

-5 nem megoldás. Meg kell vizsgálni, hogy $\frac{6p}{p-1}$ mely p esetén esik egybe valamely kizárt értékkel.

$\frac{6p}{p-1} \neq 6$; ez minden p -re teljesül,

$\frac{6p}{p-1} \neq -5$, azaz $p \neq \frac{5}{11}$. A feltétel szerint p egész szám. Ezért $\frac{6p}{p-1}$ semmilyen egész p -re nem lehet (-5) -tel egyenlő.

Az egyenletnek $p \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ teljesülése esetén van valós gyöke. Mivel két egész szám hányadosa racionális szám, ezért az egyenlet megoldásaként kapott $\frac{6p}{p-1}$ egyben racionális is. Tehát az egyenletnek egyetlen gyöke van a racionális számok halmazán, ez $\frac{6p}{p-1}$, ahol $p \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$.

Megjegyzések:

- Gyorsabban eljutunk a megoldáshoz, ha az eredeti egyenletben a számlálót és a nevezőt szorzattá alakítjuk, majd egyszerűsítjük a törtet.

$$\frac{x(x+5)}{(x+5)(x-6)} = p$$

$$\frac{x}{x-6} = p$$

Az eredeti egyenlet $x \neq -5$ és $x \neq 6$ feltételekkel ekvivalens a $(p-1)x = 6p$ elsőfokú egyenlettel.

$p = 1$ esetén $0 \cdot x = 6$, aminek nincs megoldása;

$p \neq 1$ esetén $x = \frac{6p}{p-1} \in \mathbb{Q}$ (Innen a kizárt értékek fenti vizsgálatával fejezhető be a megoldás.)

- $\frac{x}{x-6} = p$ egyenletet vizsgálhatjuk úgy is, hogy meghatározzuk az

$$f(x) = \frac{x}{x-6}; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 6\}$$

függvény értékkészletét.

$$\frac{x}{x-6} = 1 + \frac{6}{x-6}$$

alapján a függvény értékkészletének nem eleme az 1, valamint – az $x \neq -5$ feltétel miatt – a $\frac{-5}{-5-6} = \frac{5}{11}$. Minden más racionális szám eleme az értékkészletnek. Figyelembe véve a $p \in \mathbb{Z}$ feltételt is, az egyenletnek $p \neq 1$ esetén van megoldása a racionális számok halmazán.

- b) Az a) szerint az egyenlet megoldása $p \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ esetén $\frac{6p}{p-1}$.

$\frac{6p}{p-1} = \frac{6(p-1)+6}{p-1} = 6 + \frac{6}{p-1}$ egész szám, ha $(p-1)$ a 6 osztója.

$p-1$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
p	2	3	4	7	0	-1	-2	-5

10. Határozza meg azokat a p valós paramétereket, amelyekre az alábbi egyenletnek két különböző pozitív gyöke van!

$$\frac{6p-9}{x^2+3x} + \frac{x}{x^2+x-6} = \frac{p}{x^2-2x}$$

Megoldás:

Alakítsuk szorzattá a nevezőket!

$$\frac{6p-9}{x(x+3)} + \frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{p}{x(x-2)}$$

A feltétel, valamint a törtek értelmezése alapján $x > 0$ és $x \neq 2$.

Szorozzuk meg az egyenletet az $x(x-2)(x+3)$ szorzattal, majd rendezzük az x hatványai szerint:

$$x^2 + (5p-9)x + 18 - 15p = 0$$

A másodfokú egyenlet

$$\text{diszkriminánsa: } D = (5p-9)^2 - 4(18-15p) = 25p^2 - 30p + 9 = (5p-3)^2,$$

gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{9-5p \pm (5p-3)}{2} \begin{cases} = 3 \\ = -5p+6 \end{cases}$$

Két különböző gyököt kapunk, ha

$p \neq 0,6$. (Ezt a $D = (5p-3)^2 > 0$ egyenlőtlenségből, vagy a $-5p+6 \neq 3$ egyenletből kapjuk.)

Továbbá, ha $-5p+6 \neq 2$, mivel az eredeti egyenlet $x=2$ -re nem értelmezett. Innen $p \neq 0,8$.

Mindkét gyök pozitív, ha $-5p+6 > 0$, azaz ha $p < 1,2$.

Tehát az egyenletnek két különböző pozitív gyöke van, ha $p \in]-\infty; 1,2[\setminus \{0,6; 0,8\}$.

11. Melyek azok a p pozitív számok, amelyekre az $x^4 - (3p+5)x^2 + (p+1)^2 = 0$ egyenlet gyökei egy számtani sorozat egymás utáni tagjai?

Pótírásbeli érettségi-felvételi feladat 1978

Megoldás:

Az egyenlet $y = x^2$ -ben másodfokú, ezért ha x_0 gyöke, akkor $-x_0$ is gyöke. (*)

Az $y^2 - (3p+5)y + (p+1)^2 = 0$ egyenlet diszkriminánsa

$$D = (3p+5)^2 - 4(p+1)^2 = 5p^2 + 22p + 21$$

minden p -re pozitív, ezért a másodfokú egyenletnek két, a negyedfokúnak négy különböző gyöke van. A * megfigyelés figyelembe vételével a gyökök: $x_1, -x_1, x_2, -x_2$. Feltehetjük: $x_2 > x_1 > 0$, így a négy gyök rendezve: $-x_2 < -x_1 < x_1 < x_2$.

A gyökök egy számtani sorozat egymást követő tagjai, ezért $x_1 - (-x_1) = x_2 - x_1$, amiből: $x_2 = 3x_1$.

Alkalmazzuk a Viète formulákat a másodfokú egyenletre!

$$\begin{aligned}y_1 + y_2 &= x_1^2 + x_2^2 = 3p + 5 \text{ és} \\y_1 \cdot y_2 &= x_1^2 \cdot x_2^2 = (p + 1)^2.\end{aligned}$$

$x_2 = 3x_1$ behelyettesítésével kapjuk: $10x_1^2 = 3p + 5$ és $9x_1^4 = (p + 1)^2$.

Az első egyenletből $x_1^2 = \frac{3p+5}{10}$. Ezt a másodikba helyettesítjük: $9 \cdot \left(\frac{3p+5}{10}\right)^2 = (p + 1)^2$.

$p > 0$ esetén ez csak akkor teljesül, ha

$$3 \cdot \frac{3p + 5}{10} = p + 1$$

$$9p + 15 = 10p + 10 \Rightarrow p = 5.$$

Ekkor $x_1^2 = 2$, és a negyedfokú egyenlet gyökei $-3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$. Ez a négy szám egy $2\sqrt{2}$ differenciájú számtani sorozat négy egymást követő tagja.

Tehát a feladat megoldása $p = 5$.

12. Az a valós paraméter mely értékeire van egyetlen olyan $(x; y)$ valós számpár, amely kielégíti az

$$x^2 + y^2 - 4x + 2 \leq 0$$

egyenlőtlenséget és az

$$x - y + a = 0$$

egyenletet is?

A tanárképző főiskolák Péter Rózsa matematikaversenye 2003.

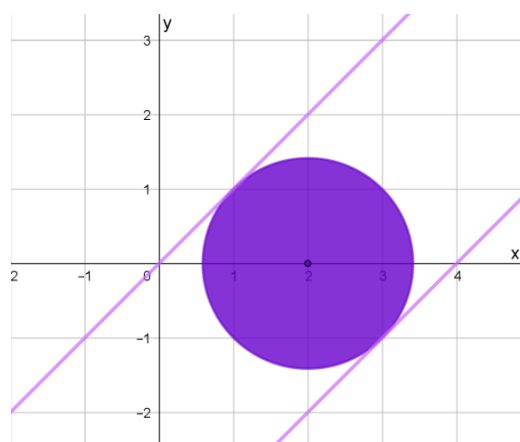
Megoldás:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 + y^2 - 2$$

Az $(x - 2)^2 + y^2 - 2 \leq 0$ egyenlőtlenség megoldásai azok az $(x; y)$ számpárok, amelyek a koordinátasík $(2; 0)$ középpontú $\sqrt{2}$ sugarú körlemez pontjai. Ennek a körlemeznek és az $y = x + a$ egyenletű egyenesnek pontosan akkor van egy közös pontja, ha az egyenes érinti a kört. Az érintési pont koordinátái az

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = 2 \\ y = x + a \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása.



$$(x - 2)^2 + (x + a)^2 = 2$$

$$2x^2 + (2a - 4)x + a^2 + 2 = 0$$

A másodfokú egyenletnek egy valós gyöke van, ha a diszkriminánsa 0.

$$(2a - 4)^2 - 8(a^2 + 2) = 0$$

$$-4a^2 - 16a = 0$$

Innen $a = 0$ vagy $a = -4$.

Ha $a = 0$, akkor az érintő egyenlete $y = x$, ha $a = -4$, akkor az érintő egyenlete $y = x - 4$.

Megjegyzés:

A megoldást megkaphatjuk így is:

A második egyenletből $y - t$ kifejezzük és behelyettesítjük az első egyenlőtlenségbe. Így a következő másodfokú paraméteres egyenlőtlenséget kapjuk:

$$x^2 + (x + a)^2 - 4x + 2 \leq 0. \text{ Ebből } 2x^2 + (2a - 4)x + a^2 + 2 \leq 0.$$

A baloldal x másodfokú függvénye, aminek a grafikonja felfelé nyíló parabola. Ennek az egyenlőtlenségnek akkor van pontosan egy valós gyöke, ha a parabola érinti az x tengelyt. Ez akkor teljesül, ha a diszkrimináns 0. Innen, a fentiek szerint $a = 0$ vagy $a = -4$.

13. Mi az

$$y = 4x^2 - 4(a + 1)x + a^2 + 4a - 1$$

egyenletű parabolák csúcspontjainak mértani helye, ha az a paraméter befutja az összes valós számot?

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1979.

Megoldás:

A csúcspontok koordinátáit teljes négyzetté kiegészítéssel határozzuk meg.

$$y = 4[x^2 - (a + 1)x] + a^2 + 4a - 1 = 4\left[\left(x - \frac{a + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a + 1}{2}\right)^2\right] + a^2 + 4a - 1$$

$$y = 4\left(x - \frac{a + 1}{2}\right)^2 + 2a - 2$$

A parabola csúcspontja $C\left(\frac{a+1}{2}; 2a - 2\right)$. Tetszőleges a valós számhoz tartozik egy C pont.

$x = \frac{a+1}{2}$, $y = 2a - 2$. Innen a paraméter kiküszöbölésével

$$a = 2x - 1$$

$$y = 2(2x - 1) - 2 = 4x - 4$$

Megfordítva, az $y = 4x - 4$ egyenes tetszőleges pontjához tartozik egy a érték ($a = 2x - 1$).

A parabolák csúcspontjainak mértani helye az $y = 4x - 4$ egyenletű egyenes.

14. Melyik az $f(x) = x^2 - 6x + 9$ függvény grafikonjának az a pontja, melyben a görbéhez húzott érintő egyenes a koordinátatengelyek pozitív ágaival maximális területű háromszöget zár e!

Megoldás:

Ha a keresett P pont első koordinátája p , akkor a második koordináta $p^2 - 6p + 9 = (p - 3)^2$.

A P pontbeli érintő iránytangense $f'(p) = 2p - 6$. A P pontra illeszkedő érintő egyenlete:

$$y - (p - 3)^2 = (2p - 6)(x - p)$$

$$y = (2p - 6)x + (9 - p^2)$$

Az érintőnek az y tengellyel való metszéspontjának koordinátái: $x = 0$ és $y = 9 - p^2$. A feltétel szerint $y = 9 - p^2 > 0$. Ez teljesül, ha $-3 < p < 3$.

Az érintő az x tengelyt ott metszi, ahol $y = 0$;

x koordinátája az alábbi egyenletből számolható ki.

$$(2p - 6)x + (9 - p^2) = 0$$

$$2(p - 3)x = (p - 3)(p + 3)$$

Innen $p \neq 3$ miatt $x = \frac{p+3}{2}$.

Az érintő a $-3 < p < 3$ feltétel teljesülése mellett a koordinátatengelyek pozitív ágát metszi.

A vizsgált derékszögű háromszög oldalai $\frac{p+3}{2}$ és $9 - p^2$, területe

$$T(p) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p+3}{2}\right) (9 - p^2) = \frac{(p+3) \cdot (9 - p^2)}{4}.$$

p függvénye. A függvény maximumát a $]-3; 3[$ intervallumban keressük. Ott lehet maximuma, ahol a deriváltja 0.

$$T'(p) = \frac{9 - p^2 + (p+3)(-2p)}{4}$$

$$= \frac{-3p^2 - 6p + 9}{4}$$

$$-3p^2 - 6p + 9 = 0, \text{ ha } p = 1 \text{ illetve, ha } p = -3.$$

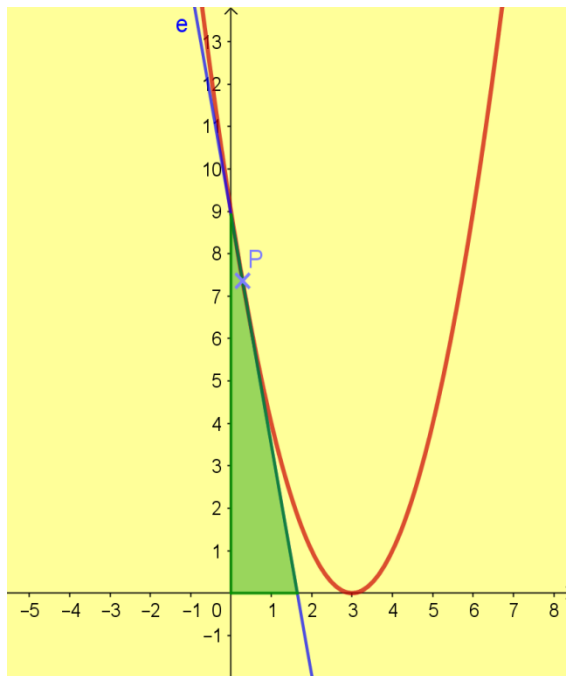
$p = -3$ nem megoldás. (Nincs a megengedett alaphalmazban.)

$$T''(p) = -\frac{6p+6}{4}; \quad T''(1) = -3 < 0$$

tehát $p = 1$ a területfüggvény maximumhelye. A keresett pont az $(1; 4)$ pont.

Az érintő egyenlete: $y = -4x + 8$. Ez az egyenes a koordináta tengelyeket a $(2; 0)$, illetve a $(0; 8)$ pontokban metszi.

A maximális területű háromszög területe 8 területegység.



III. Ajánlott feladatok

1. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$2(p+2)x - (p+1)y = p$$

$$p^2(x-y) = 4x-y$$

egyenletrendszert, amelyben p valós paraméter!

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1998.

2. A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $|x^2 - 6x + 5| = p$ egyenletnek a $[0; 7]$ intervallumban?

Emelt szintű érettségi 2005. október 25.

3. Határozzuk meg a p valós paraméter mely értékeinél hány megoldása van a következő egyenletnek:

$$\left| \sqrt{|x-3|} - 2 \right| - 1 = p$$

OKTV 2013/2014, II. kategória, 1. forduló

4. Határozza meg az α valós paraméter értékét úgy, hogy a

$$4x^2 - 4(\sin\alpha + \cos\alpha)x + 1 + \sin\alpha = 0$$

egyenletnek egy darab kétszeres gyöke legyen!

Emelt szintű érettségi 2008. május 6.

5. A p paraméter mely értékeire van a $(3p-6)x^2 + (2p+1)x + 5 - 5p = 0$ egyenletnek egy valós gyöke?

6. Határozza meg a p valós paraméter értékeit úgy, hogy a $(p-3)x^2 + 2px + (p+5) = 0$ egyenletnek két különböző valós gyöke legyen!

7. Határozza meg a p valós paramétert úgy, hogy minden x valós számra teljesüljön

$$(p-2)x^2 + (p-1)x + p - 2 < 0 !$$

8. Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = (p-3,5)x^2 + 2(p-2)x+6$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter!

a) Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellett az $x = -2$ zérushelye a függvénynek!

b) Milyen p értékek esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb?

Emelt szintű érettségi 2005. május 10.

9. Az $x^2 - x + p = 0$ egyenlet valós gyökei eggyel kisebbek, mint az $x^2 + px - 1 = 0$ egyenlet valós gyökei. Számítsa ki a p valós paraméter értékét!

Emelt szintű érettségi 2006. május 9.

10. Legyenek a $\frac{p}{p-2} \cdot x^2 + \frac{p-1}{p+1} \cdot x + \frac{1}{4} = 0$ egyenlet valós gyökei x_1 és x_2 .

Határozza meg a $p \neq 0$ valós paraméter mindazon értékeit, amelyekre fennáll, hogy

$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = \frac{1}{p+1}!$$

OKTV 2015/2016, I. kategória, 1. forduló

11. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $y = x + 17$ egyenletű egyenessel, és érinti az $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 14 = 0$ egyenletű kört!

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1998.

12. Adva van a síkban két egymásra merőleges egyenes e és f , és az e egyenesen két pont A és B. Az f egyenes egy tetszőleges P pontját az adott pontokkal összekötő egyenesekre emeljünk az A és B pontokban merőlegeseket. Mi a mértani helye a merőlegesek M metszéspontjainak, ha a P pont végigfut az f egyenesen?

*25. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 2016.március; 10. osztály
KöMaL 1955. november, 657. feladat*

13. Határozza meg a p és a q paraméterek értékét úgy, hogy az $x^2 + y^2 + px + qy + 16 = 0$ egyenletű kör érintse az x tengelyt, és az y tengely pozitív feléből 6 egység hosszúságú szakaszt metsszen ki!

Pótírásbéli érettségi-felvételi feladat 1997.

14. Adja meg az α paraméter azon értékeit a $[0; 2\pi]$ intervallumban, amelyeknél a

$$(2\cos\alpha - 1)x^2 + 4x + 4\cos\alpha + 2 = 0$$

egyenlet gyökei ellenkező előjelűek!

Pótírásbéli érettségi-felvételi feladat 2000.

15. Határozzuk meg a k paraméternek azt az értékét, amelyre az

$$x^2 + (2k + 5)x + \frac{3}{2}k^2 + 8k + 2 = 0$$

egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege minimális!

16. Milyen határok között mozog a $p + q$ összeg értéke, ha p és q olyan valós számok, hogy az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek valós gyökei vannak, és az egyenlet gyökeire fennáll az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ összefüggés?

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1992.

17. Adottak az alábbi egyenletek:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{p}{x+1} + \frac{q}{x} = 0 \quad (2)$$

Bizonyítsuk be, hogy ha mindkét egyenletnek két valós gyöke van és az (1) egyenletnek pontosan egy gyöke van a $]0; 1[$ intervallumban, akkor a (2) egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív.

Arany Dániel Matematika Tanulmányverseny 2017/2018, Haladók II. kategória, 2. forduló

KöMaL 1930. január, 526. feladat

18. A c valós paraméter mely értékeire lesz a $6x^4 - 5x^3 + cx^2 - 5x + 6 = 0$ egyenletnek négy különböző valós gyöke?

19. Határozza meg, hogy a p valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$x^4 + (p+1)x^2 + p^2 + 2p + \frac{1}{4} = 0$$

egyenlet megoldáshalmaza pontosan két valós számot tartalmazzon!

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 2001.

20. a) Mutassuk meg, hogy az $x^4 - (k+3)x^3 - (k-11)x^2 + (k+3)x + (k-12) = 0$

egyenlet két gyöke nem függ k -től.

b) A további két gyök k mely értékei mellett lesz valós?

KöMaL 1961. február, 1088. feladata

21. Melyek azok a p pozitív prímszámok, amelyekre a

$$(1) \quad p+1 = 2x^2$$

$$(2) \quad p^2+1 = 2y^2$$

egyenletrendszernek van egész megoldása?

Arany Dániel Matematika Tanulmányverseny 2013/2014, Haladók III. kategória, 1. forduló

22. Az m paraméter mely egész értékénél lesz a

$$9^x + 2(m+3) \cdot 3^x + m^2 = 22$$

egyenletnek két különböző gyöke a valós számok halmazán? Adja meg a lehetséges gyökök számértékét is!

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1993.

23. Mely valós számokra igaz a

$$\log_m x + \log_{mx} x + (\log_m x) \cdot \log_{\frac{m}{x}} x > 0$$

egyenlőtlenség, amelyben m valós paraméter?

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1997.

24. Igazoljuk, hogy van olyan pont a síkon, amelyre a p paraméter minden értéke esetén illeszkedik az $y = (p + 1)x^2 - (3p + 2)x - 3$ egyenletű görbe!

25. Határozza meg az n egész paraméter értékét, ha egy háromszög a, b, c oldalaira:

$$a + b = 2n + 2$$

$$a + c = 2n + 4$$

$$b + c = 2n + 6$$

Legfeljebb mekkora lehet a háromszög legnagyobb szöge?

26. A p valós paraméter mely értékei mellett található olyan x valós szám, hogy a

$$3^{2+x} + 3^{2-x}, \quad p, \quad 9^x + 9^{-x}$$

egy számtani sorozat három egymást követő tagja legyen?

27. Határozza meg a következő függvény értékkészletét!

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = 3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x$$

28. Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl.)

Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x = 1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek?

Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x = 1$ a függvénynek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye!

Igazolja, hogy k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye!

Emelt szintű érettségi 2008. május 6.

29. Határozza meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvényben az a, b és c valós paraméterek értékét, ha a függvényről tudjuk a következőket:

$$(1) f(1) = f(-1) + 4;$$

$$(2) f'(3) = 10 \quad (f' \text{ az } f \text{ deriváltfüggvénye});$$

$$(3) \int_0^2 f(x) dx = -8.$$

Emelt szintű érettségi 2014. május 7.

30. Az a valós paraméterrel adott az alábbi egyenlet, jelölje az egyenlet valós gyökeit x_1 és x_2 :

$$2x^2 - 3(a + 2)x + 9a + 1 = 0.$$

- a) Határozzuk meg a értékét úgy, hogy az $x_1^2 + x_2^2$ kifejezés értéke minimális legyen.
- b) Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan valós a érték, amely esetén x_1 és x_2 is egész szám.
- c) Keressük meg az a paraméter olyan egész értékeit, melyek esetén az egyenletnek egyik gyöke egész.

OKTV 2006/2007, II. kategória, 1. forduló

IV. Az ajánlott feladatok megoldásai

1. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$2(p+2)x - (p+1)y = p$$

$$p^2(x-y) = 4x-y$$

egyenletrendszer, amelyben p valós paraméter!

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1998.

Megoldás:

Rendezzük át az egyenleteket, az alábbiak szerint:

$$2(p+2)x = (p+1)y + p \quad \text{I.}$$

$$(p^2-4)x = (p^2-1)y. \quad \text{II.}$$

Szorozzuk az első egyenletet $(p-1)$ -gyel, majd ebből vonjuk ki a másodikat!

$$(2p^2+2p-4-p^2+4)x = p(p-1)$$

Alakítsuk szorzattá a bal oldalt is!

$$p(p+2)x = p(p-1)$$

$p = 0$ esetén a két oldal nulla, ezért x tetszőleges szám.

Mindkét eredeti egyenlet: $4x - y = 0$. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, az $(a; 4a)$ számpár, ahol a tetszőleges valós szám.

$p = -2$ esetén a bal oldal nulla, a jobb oldal nem az, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

$p \neq 0$ és $p \neq -2$ esetén $x = \frac{p-1}{p+2}$.

Meg kell még határozni y megfelelő értékét. Ehhez helyettesítsük vissza az x -re kapott értéket az I. egyenletbe!

$$2(p-1) = (p+1)y + p$$

$$p-2 = (p+1)y$$

Ha $p = -1$, akkor az egyenlet jobb oldala nulla, bal oldala nem, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Ha $p \neq -1$, akkor $(p+1)$ -gyel oszthatunk, $y = \frac{p-2}{p+1}$.

Összegezve:

Az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha $p = -2$, valamint, ha $p = -1$;

egy megoldása van, ha $p \neq 0$ és $p \neq -2$ és $p \neq -1$, mégpedig a $\left(\frac{p-1}{p+2}; \frac{p-2}{p+1}\right)$ számpár;

végtelen sok megoldása van, ha $p = 0$.

2. A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $|x^2 - 6x + 5| = p$ egyenletnek a $[0; 7]$ intervallumban?

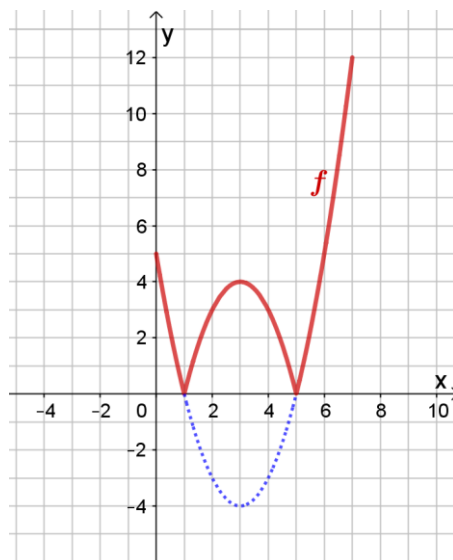
Emelt szintű érettségi 2005. október 25.

Megoldás:

$$x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$$

Ábrázoljuk az $f: [0; 7] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = |(x - 3)^2 - 4|$ függvényt, majd leolvassuk a megoldást a grafikonról.

	a megoldások száma
$p < 0$	0
$p = 0$	2
$0 < p < 4$	4
$p = 4$	3
$4 < p \leq 5$	2
$5 < p \leq 12$	1
$12 < p$	0



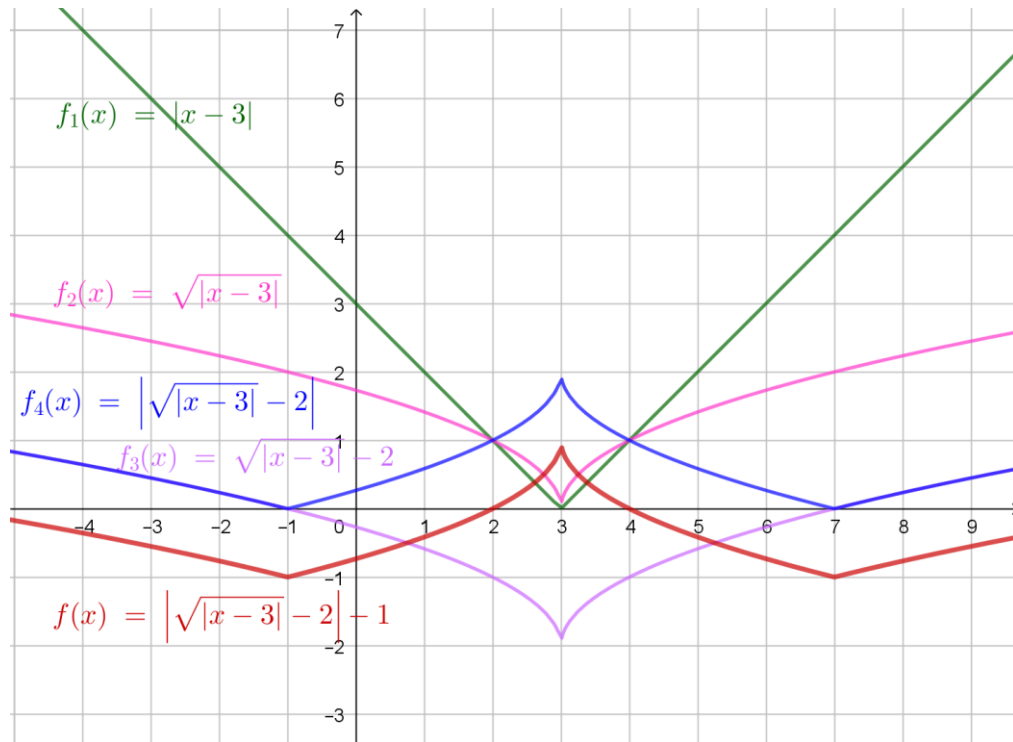
3. Határozzuk meg a p valós paraméter mely értékeinél hány megoldása van a következő egyenletnek:

$$\left| \sqrt{|x - 3|} - 2 \right| - 1 = p$$

OKTV 2013/2014, II. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Ábrázoljuk a bal oldalt az x változó függvényeként. (A függvény-transzformációk az ábráról leolvashatók.)



Az $f(x) = \left| \sqrt{|x-3|} - 2 \right| - 1$ függvény értékkészlete $[-1; +\infty[$. A jobb oldalon a konstans $g(x) = p$ függvény grafikonja egy x tengellyel párhuzamos egyenes. A megoldások számát az dönti el, hogy a két függvény grafikonjának hány közös pontja van.

p értéke	$p < -1$	$p = -1$	$-1 < p < 1$	$p = 1$	$p > 1$
a megoldások száma:	0	2	4	3	2

4. Határozza meg az α valós paraméter értékét úgy, hogy a

$$4x^2 - 4(\sin\alpha + \cos\alpha)x + 1 + \sin\alpha = 0$$

egyenletnek egy darab kétszeres gyöke legyen!

Emelt szintű érettségi 2008. május 6.

Megoldás:

A másodfokú egyenletnek akkor van két egyező gyöke, ha a diszkriminánsa 0.

$$D = 16(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 16(1 + \sin\alpha) = 16(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 1 - \sin\alpha)$$

A $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosság alkalmazásával megoldandó a $2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha = 0$ egyenlet.

$$\sin\alpha(2 \cdot \cos\alpha - 1) = 0.$$

Ennek megoldásai a $\sin\alpha = 0$ egyenlet gyökei: $\alpha = k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$,

valamint a $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ egyenlet gyökei: $\alpha = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi$ és $\alpha = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, ahol $l, n \in \mathbb{Z}$.

Az ekvivalens átalakítások miatt ez a három gyöksorozat teljesíti azt a feltételt, hogy az eredeti egyenletnek egy darab kétszeres gyöke legyen.

5. A p paraméter mely értékeire van a $(3p - 6)x^2 + (2p + 1)x + 5 - 5p = 0$ egyenletnek egy valós gyöke?

Megoldás:

$p = 2$ esetén egyenletünk: $5x - 5 = 0$ elsőfokú. Ennek egy valós gyöke van: $x = 1$.

$p \neq 2$ esetén egyenletünk másodfokú. Ennek pontosan akkor van egy valós gyöke, ha diszkriminánsa 0.

$$D = (2p + 1)^2 - 4(3p - 6)(5 - 5p) = 4p^2 + 4p + 1 - 4(-15p^2 + 45p - 30) \\ = 64p^2 - 176p + 121$$

$$64p^2 - 176p + 121 = 0, \text{ ha } p = \frac{11}{8}.$$

Ha $p = \frac{11}{8}$, a másodfokú egyenlet $-\frac{15}{8}x^2 + \frac{15}{4}x - \frac{15}{8} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$. Ennek egyetlen gyöke $x = 1$.

Tehát az egyenletnek egy valós gyöke van, ha $p = 2$ vagy ha $p = \frac{11}{8}$.

6. Határozza meg a p valós paraméter értékeit úgy, hogy a $(p - 3)x^2 + 2px + (p + 5) = 0$ egyenletnek két különböző valós gyöke legyen!

Megoldás:

Az egyenletnek akkor van két különböző valós gyöke, ha másodfokú és a diszkriminánsa pozitív, azaz $p \neq 3$ és $D > 0$.

$$D = 4p^2 - 4(p - 3)(p + 5) = 4(p^2 - p^2 - 2p + 15) = 4(-2p + 15)$$

$$D > 0, \text{ ha } p < 7,5.$$

Tehát az egyenletnek két különböző valós gyöke van, ha $p \in]-\infty; 7,5[\setminus \{3\}$.

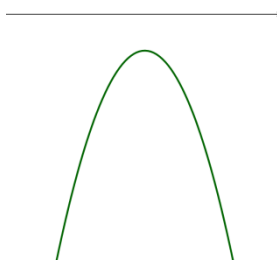
7. Határozza meg a p valós paramétert úgy, hogy minden x valós számra teljesüljön

$$(p - 2)x^2 + (p - 1)x + p - 2 < 0!$$

Megoldás:

$p = 2$ esetén $x < 0$ csak a negatív számokra áll fenn. Ezért $p = 2$ nem megoldás.

$p \neq 2$ esetén a másodfokú egyenlőtlenség akkor áll fenn minden x valós számra, ha a bal oldalnak megfelelő függvény grafikonja teljes egészében az x tengely alatt van.

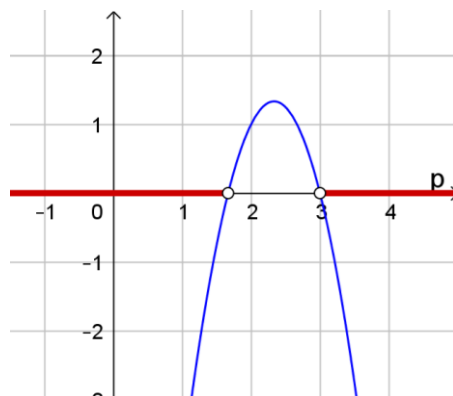


Ekkor a másodfokú tag együtthatója negatív és a függvénynek nincs zérushelye, azaz

$$p < 2 \text{ és } D < 0.$$

$$D = (p-1)^2 - 4(p-2)^2 = p^2 - 2p + 1 - 4p^2 + 16p - 16 = -3p^2 + 14p - 15$$

$$-3p^2 + 14p - 15 = 0, \text{ ha } p = \frac{5}{3} \text{ vagy ha } p = 3.$$



$$-3p^2 + 14p - 15 < 0, \text{ ha } p < \frac{5}{3} \text{ vagy ha } p > 3.$$

A $p < 2$ feltételt figyelembe véve az eredeti egyenlőtlenség akkor áll fenn minden x valós számra, ha $p < \frac{5}{3}$.

8. Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = (p - 3,5)x^2 + 2(p - 2)x + 6$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter!

- Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellett az $x = -2$ zérushelye a függvénynek!
- Milyen p értékek esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb?

Emelt szintű érettségi 2005. május 10.

Megoldás:

- -2 zérushelye a függvénynek, ha $f(-2) = 0$.

$$f(-2) = 4(p - 3,5) - 4(p - 2) + 6 = 4p - 14 - 4p + 8 + 6 = 0, \text{ amit igazolni kellett.}$$

- Az egyenletnek két valós gyöke van, ezért $p \neq 3,5$.

Az egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{-2(p-2) \pm \sqrt{4(p-2)^2 - 24(p-3,5)}}{2(p-3,5)} = \frac{-2(p-2) \pm \sqrt{4p^2 - 40p + 100}}{2(p-3,5)}$$

$$= \frac{-2(p-2) \pm (2p-10)}{2(p-3,5)} = \frac{-p+2 \pm (p-5)}{p-3,5}$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{-3}{p-3,5}.$$

A $\frac{-3}{p-3,5} > 1$ egyenlőtlenséget 0-ra rendezzük:

$$\frac{0,5-p}{p-3,5} > 0, \text{ ha } 0,5 < p < 3,5.$$

Tehát a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb, ha $0,5 < p < 3,5$.

9. Az $x^2 - x + p = 0$ egyenlet valós gyökei eggyel kisebbek, mint az $x^2 + px - 1 = 0$ egyenlet valós gyökei. Számítsa ki a p valós paraméter értékét!

Emelt szintű érettségi 2006. május 9.

Megoldás:

Alkalmazzuk a Viète formulákat:

Az $x^2 + px - 1 = 0$ egyenlet gyökeire $x_1 + x_2 = -p$ és $x_1 \cdot x_2 = -1$.

Az $x^2 - x + p = 0$ egyenlet gyökei $x_1 - 1$ és $x_2 - 1$, ezekre

$$x_1 - 1 + x_2 - 1 = 1 \text{ és } (x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = p.$$

A gyökök összegére felírt két összefüggés alapján: $-p - 2 = 1$, ahonnan $p = -3$.

(A gyökök szorzata: $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1) = x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = -1 + p + 1 = p$ – ez tetszőleges p -re igaz).

Helyettesítsük vissza a két egyenletbe a $p = -3$ értéket. Az $x^2 - x - 3 = 0$ gyökei: $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ valóban eggyel kisebbek, mint az $x^2 - 3x - 1 = 0$ egyenlet gyökei $\left(\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}\right)$.

Megjegyzés:

Semmiképp sem hagyható el annak ellenőrzése, hogy mindkét egyenletnek valós gyökei vannak-e. Ez a diszkriminánsok vizsgálatával is megtehető.

10. Legyenek a $\frac{p}{p-2} \cdot x^2 + \frac{p-1}{p+1} \cdot x + \frac{1}{4} = 0$ egyenlet valós gyökei x_1 és x_2 .

Határozza meg a $p \neq 0$ valós paraméter mindazon értékeit, amelyekre fennáll, hogy

$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = \frac{1}{p+1}!$$

OKTV 2015/2016, I. kategória, 1. forduló

Megoldás:

A feltétel, és a törtek értelmezése alapján $p \neq 0$, $p \neq 2$ és $p \neq -1$.

A Viète formulákat alkalmazzuk:

$$\frac{p-2}{4p} + \frac{(p-1)(p-2)}{p(p+1)} = \frac{1}{p+1}.$$

Rendezés után a szóba jöhető p -kre ezzel ekvivalens az $5p^2 - 17p + 6 = 0$ egyenlet.

Tehát csak $p = \frac{2}{5}$, valamint $p = 3$ jöhet szóba megoldásként.

$p = 3$ esetén a másodfokú egyenlet: $3x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$. Ennek nincsenek valós gyökei, ezért $p = 3$ nem megoldás.

$p = \frac{2}{5}$ esetén a másodfokú egyenlet: $\frac{2}{-8}x^2 + \frac{-3}{7}x + \frac{1}{4} = 0$, azaz $7x^2 + 12x - 7 = 0$. Ennek gyökei: $\frac{-6 \pm \sqrt{85}}{7}$ valósak és teljesül rájuk a feltétel.

Ezért a feltételeknek csak $p = \frac{2}{5}$ felel meg.

11. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $y = x + 17$ egyenletű egyenessel, és érinti az $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 14 = 0$ egyenletű kört!

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1998.

Megoldás:

Az adott egyenessel párhuzamos egyenesek egyenlete $y = x + b$ alakban írható. Keressük a b paraméter azon értékét, amelyre a körnek és az egyenesnek egy közös pontja van. Az érintési pont koordinátái az

$$y = x + b$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 14 = 0$$

egyenletrendszer megoldásaként kapott számpár.

$$x^2 + (x + b)^2 - 6x - 6(x + b) - 14 = 0$$

$$2x^2 + x(2b - 12) + b^2 - 6b - 14 = 0$$

Egy megoldást kapunk, ha $D = 0$.

$$D = 4(b - 6)^2 - 8(b^2 - 6b - 14) = 0$$

Ezt rendezve kapjuk: $b^2 = 64$ Innen $b = \pm 8$.

A két érintő egyenlete: $y = x + 8$, és $y = x - 8$.

Megjegyzések:

Az érintők egyenletei másként is megkaphatók:

- Az $y = x + b$ egyenletű egyenesek közül az érintők a kör középpontjától sugárnyi távolságra vannak. A kör egyenletének kanonikus alakja: $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 32$, a kör középpontja $O(3; 3)$, sugara $4\sqrt{2}$. A pont és egyenes távolságképletébe $\left(\left|\frac{x-y+b}{\sqrt{2}}\right| = 4\sqrt{2}\right)$ behelyettesítjük O koordinátáit: $\left|\frac{3-3+b}{\sqrt{2}}\right| = 4\sqrt{2}$. Innen $b = \pm 8$, az érintők egyenletei: $y = x + 8$, és $y = x - 8$.
- Az érintési pontokat meghatározhatjuk a kör középpontján átmenő, az adott egyenesre merőleges egyenes és a kör metszéspontjaiként is. A kör érintői az érintési pontokon átmenő, az adott egyenessel párhuzamos egyenesek.

12. Adva van a síkban két egymásra merőleges egyenes e és f , és az e egyenesen két pont A és B. Az f egyenes egy tetszőleges P pontját az adott pontokkal összekötő egyenesekre emeljünk az A és B pontokban merőlegeseket. Mi a mértani helye a merőlegesek M metszéspontjainak, ha a P pont végigfut az f egyenesen?

25. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 2016.március; 10. osztály
KöMaL 1955. november, 657. feladat

Megoldás:

Válasszuk a koordináta-rendszer x tengelyének az e egyenest, y tengelyének az f egyenest. Az A pont koordinátái: $(a; 0)$, a B ponté: $(b; 0)$, a P ponté: $(0; p)$.

Ha a vagy b valamelyike, pl. $a = 0$ (azaz A éppen a két adott egyenes metszéspontja), akkor a kérdéses mértani hely egyetlen pont, a B pont lesz.

Tegyük fel, hogy a és b egyike sem 0, és zárjuk ki a $p = 0$ esetet is. ($p = 0$ esetén a két merőleges nem metszi egymást.)

Az AP egyenes iránytangense: $-\frac{p}{a}$; a BP egyenes

iránytangense: $-\frac{p}{b}$, az ezekre merőleges egyenesek iránytangensei $\frac{a}{p}$, illetve $\frac{b}{p}$, ezért az A pontban AP-re emelt merőleges és a B pontban BP-re emelt merőleges egyenletei:

$$y = \frac{a}{p}(x - a), \text{ valamint } y = \frac{b}{p}(x - b).$$

Az egyenletrendszer megoldása M pont két koordinátája:

$$a(x - a) = b(x - b)$$

$$x(a - b) = a^2 - b^2$$

A és B két különböző pont, ezért oszthatunk $(a - b)$ -vel. Így

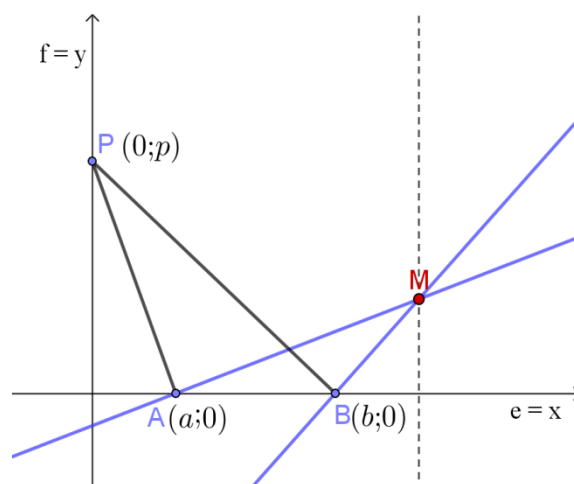
$$x = a + b \text{ és } y = \frac{ab}{p}. \quad (*)$$

p minden megengedett értékéhez ($p = 0$ -t kizártuk), tartozik egy M pont. Mivel x p -től független, az M pontok egy, az y tengellyel párhuzamos egyenesre illeszkednek, amelynek egyenlete $x = a + b$.

Meg kell még vizsgálni, hogy a $(*)$ egyenletrendszerrel jellemzett egyenes minden pontja hozzátartozik-e a mértani helyhez. Mivel $ab \neq 0$, ezért az $(a + b; 0)$ pont nem tartozik a mértani helyhez.

Az $x = a + b$ egyenes minden más $(a + b; \frac{ab}{p})$ pontjához tartozik egy $p (= \frac{ab}{y})$ érték ($y \neq 0$), ezzel együtt tartozik egy P pont is az y tengelynek választott f egyenesen.

A keresett ponthalmaz egy „lyukas” egyenes, amelynek egyenlete: $x = a + b$. Ez, az f egyenesnek az AB szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe.

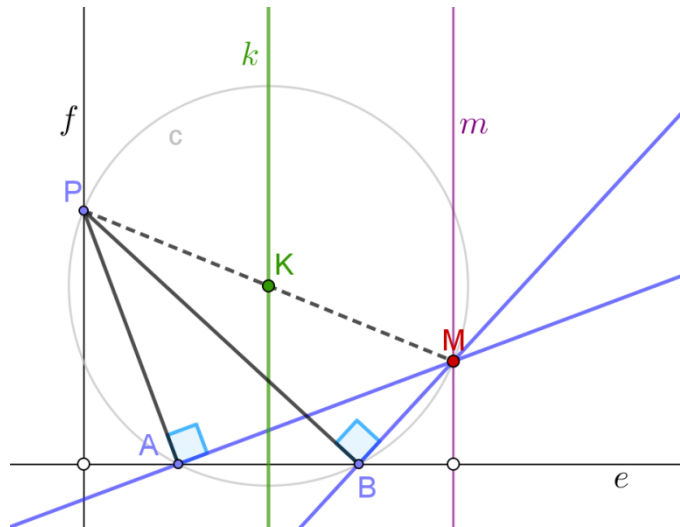


Megjegyzések:

- Az állításnak több szép elemi geometriai bizonyítása is van. Közülük egyet röviden ismertetünk.

Az A és B pontokból az PM szakasz derékszögben látszik, ezért A és B pontok a PM szakasz Thalész körére illeszkednek. A kör középpontja PM szakasz K felezőpontja. A kör húra AB, így K az AB szakasz k felezőmerőlegesén van. ($k \parallel f$).

Az M pont a P pontnak a k egyenesen mozgó K pontra vonatkozó tükörképe, vagyis az M pontok mértani helye az f egyenesnek a k egyenesre vonatkozó tükörképe.



- Az ábra jól mutatja, hogy ugyanazzal a szerkesztési eljárással kapjuk meg az m ($m \perp e$) egyenesre illeszkedő M pontból P-t, amellyel P-ből nyertük M-et.

13. Határozza meg a p és a q paraméterek értékét úgy, hogy az $x^2 + y^2 + px + qy + 16 = 0$ egyenletű kör érintse az x tengelyt, és az y tengely pozitív feléből 6 egység hosszúságú szakaszt metsszen ki!

Pótírásbeli érettségi-felvételi feladat 1997.

Megoldás:

Az y tengellyel alkotott metszéspontok első koordinátája 0, második koordinátája az $y^2 + qy + 16 = 0$

egyenlet gyökei. Ezek $y_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 64}}{2}$ akkor léteznek, ha $q^2 > 64$.

A két metszéspont távolsága 6 egység, ezért $y_2 - y_1 = 6$, feltéve $y_2 > y_1$.

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{q^2 - 64}}{2} &= 6 \\ q^2 &= 100 \\ q &= \pm 10. \end{aligned}$$

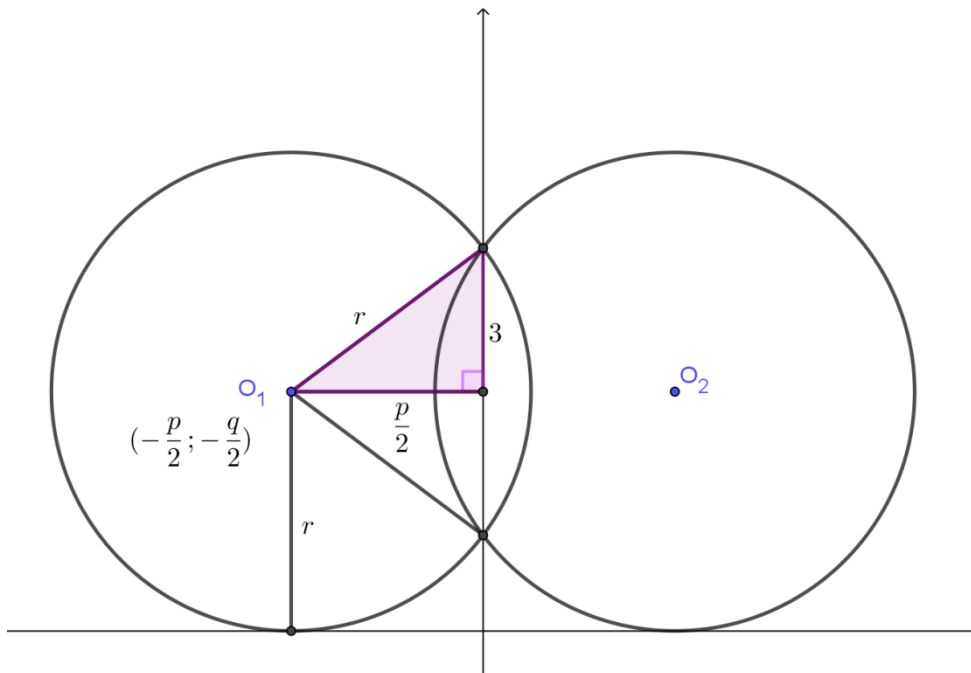
A kör egyenlete $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + q^2 - 64}{4}$. A kör az y tengely pozitív felét metszi, ezért a középpontjának második koordinátája pozitív, tehát $q < 0$, így $q = -10$. Mivel a kör érinti az x tengelyt ezért sugara $-\frac{q}{2} = 5$, a sugár négyzete: $25 = \frac{p^2 + q^2 - 64}{4} = \frac{p^2 + 36}{4}$. Innen $p^2 = 64$, $p = \pm 8$.

A feltételnek két kör felel meg, egyenletük:

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25, \text{ illetve } (x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Megjegyzés:

q értékét az ábra alapján Pitagorasz tétellel is meghatározhatjuk.



A kör egyenletét átrendezve: $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + q^2 - 64}{4}$ megkapjuk a középpont koordinátáit. A kör felülről érinti az x tengelyt, ezért $r = -\frac{q}{2} > 0$. Írjuk fel a Pitagorasz tételt a színessel jelölt háromszögre: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 9 = \frac{p^2 + q^2 - 64}{4}$. Innen $q^2 = 100$. $q < 0$ miatt $q = -10, r = 5$.

14. Adja meg az α paraméter azon értékeit a $[0; 2\pi]$ intervallumban, amelyeknél a

$$(2\cos\alpha - 1)x^2 + 4x + 4\cos\alpha + 2 = 0$$

egyenlet gyökei ellenkező előjelűek!

Pótírásbeli érettségi-felvételi feladat 2000.

Megoldás:

Ahhoz, hogy az egyenletnek két különböző valós gyöke legyen, szükséges, hogy a másodfokú legyen. Ezért a másodfokú tag együtthatója nem lehet 0, $\cos\alpha \neq \frac{1}{2}$.

A két gyök különböző előjelű akkor és csak akkor, ha $x_1 \cdot x_2 < 0$. (Ez esetben a diszkrimináns pozitív. /Lásd a Kidolgozott 8/e feladat megoldását./)

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4\cos\alpha + 2}{2\cos\alpha - 1} < 0.$$

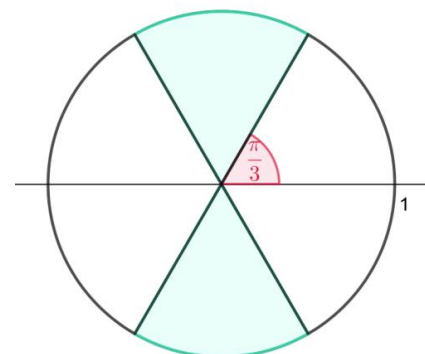
	$\cos \alpha < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < \cos \alpha < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \cos \alpha$
számláló	–	+	+
nevező	–	–	+
tört	+	–	+

Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha

$$-\frac{1}{2} < \cos \alpha < \frac{1}{2}.$$

Ez pontosan azokra a $[0; 2\pi]$ intervallumbeli α szögekre igaz, amelyekre:

$$\alpha \in \left] \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right[$$



15. Határozzuk meg a k paraméternek azt az értékét, amelyre az

$$x^2 + (2k + 5)x + \frac{3}{2}k^2 + 8k + 2 = 0$$

egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege minimális!

Megoldás:

A gyökök négyzetének összege kifejezhető a gyökök összege és szorzata segítségével:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

A Viète formulákat alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (-2k - 5)^2 - 2\left(\frac{3}{2}k^2 + 8k + 2\right) = 4k^2 + 20k + 25 - 3k^2 - 16k - 4 = \\ &= k^2 + 4k + 21 \end{aligned}$$

Innen $x_1^2 + x_2^2 = (k + 2)^2 + 17$. E másodfokú kifejezés minimális, ha $k = -2$, a minimum értéke 17.

Ellenőrizni kell még, hogy a valós gyökök négyzetösszege lehet-e 17. Ehhez megvizsgáljuk, hogy $k = -2$ -re valós gyököket kapunk-e.

$k = -2$ esetén a másodfokú egyenlet: $x^2 + x + 6 - 16 + 2 = 0$, azaz $x^2 + x - 8 = 0$. Ennek gyökei valósak:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2} \left(\begin{aligned} &= \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} \end{aligned} \right),$$

(négyzetösszegük $x_1^2 + x_2^2 = \frac{2+66}{4} = 17$).

Megjegyzések:

- A fenti vizsgálat szükséges, hiszen például az $x^2 + px + 1 = 0$ egyenlet esetén $x_1^2 + x_2^2 = (-p)^2 - 2$. $p^2 - 2$ minimális, ha $p = 0$, de ekkor az egyenlet $x^2 + 1 = 0$, aminek nincs valós gyöke.

Az $x^2 + px + 1 = 0$ egyenletnek pontosan akkor van valós gyöke, ha $D = p^2 - 4 \geq 0$, azaz ha $p^2 \geq 4$. Tehát $p^2 - 2$ legkisebb értéke $4 - 2 = 2$. Ez akkor áll fenn, ha $p = \pm 2$.

- Egy másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van valós gyöke, ha az egyenlet diszkriminánsa nem negatív. Itt $D = (-2k - 5)^2 - 4\left(\frac{3}{2}k^2 + 8k + 2\right)$.

$D \geq 0$, ha $-2k^2 - 12k + 17 \geq 0$. Ez teljesül, ha $k \in \left[\frac{-6-\sqrt{70}}{2}; \frac{-6+\sqrt{70}}{2}\right]$. -2 eleme ennek.

16. Milyen határok között mozog a $p + q$ összeg értéke, ha p és q olyan valós számok, hogy az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek valós gyökei vannak, és az egyenlet gyökeire fennáll az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ összefüggés?

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1992.

Megoldás:

A másodfokú egyenletnek van valós gyöke, ha $p^2 - 4q \geq 0$.

A Viète formulákat alkalmazzuk:

$$1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q.$$

Innen $q = \frac{p^2 - 1}{2}$.

A $p + q$ összeget kifejezzük p -vel:

$$p + q = p + \frac{p^2 - 1}{2} = \frac{p^2 + 2p - 1}{2} = \frac{1}{2}(p + 1)^2 - 1.$$

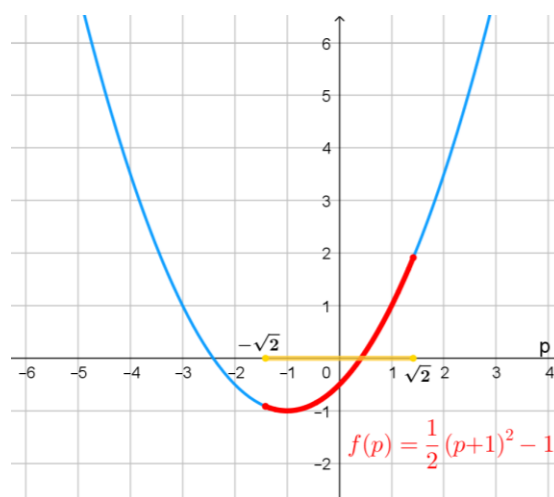
Figyelembe kell venni a $0 \leq p^2 - 4q = p^2 - 2p^2 + 2 = 2 - p^2$ feltételt.

$p^2 \leq 2$, ha $-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$.

A $p + q$ összeg értékének vizsgálata egyenértékű az $f(p) = \frac{1}{2}(p + 1)^2 - 1$, $p \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ függvény értékkészletének megadásával.

E függvénynek abszolút minimumhelye $p = -1$, minimuma $f(-1) = -1$, abszolút maximumhelye $p = \sqrt{2}$, maximuma $f(\sqrt{2}) = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Mivel a függvény folytonos, ezért -1 és $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ között minden értéket felvesz.



Megjegyzés:

A határok az alábbi algebrai átalakításokkal is megkaphatók:

Mivel $-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$, ezért

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} + 1 &\leq p + 1 \leq \sqrt{2} + 1 \\ 0 &\leq (p + 1)^2 \leq (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2} \\ 0 &\leq \frac{(p + 1)^2}{2} \leq \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \\ -1 &\leq \frac{1}{2}(p + 1)^2 - 1 \leq \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Tehát a feladat feltételei mellett

$$-1 \leq p + q \leq \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}.$$

17. Adottak az alábbi egyenletek:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{p}{x+1} + \frac{q}{x} = 0 \quad (2)$$

Bizonyítsuk be, hogy ha mindkét egyenletnek két valós gyöke van és az (1) egyenletnek pontosan egy gyöke van a $]0; 1[$ intervallumban, akkor a (2) egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív.

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2017/2018, Haladók II. kategória, 2. forduló

KöMaL 1930. január, 526. feladat

Megoldás:

A feltétel szerint az (1) egyenletnek két valós gyöke van, ezért az $f(x) = x^2 + px + q$ függvény grafikonja metszi az x tengelyt, s mivel a $]0; 1[$ intervallumba közülük csak az egyik esik, ezért $f(0) \cdot f(1) < 0$, azaz

$$q(1 + p + q) < 0. \quad (*)$$

A (2) egyenlet nem értelmezett, ha

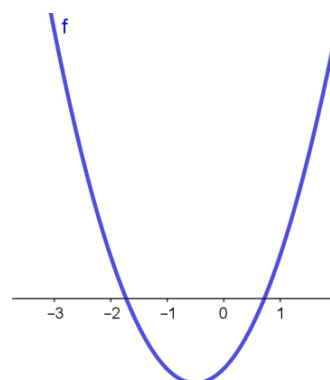
$x \in \{-2; -1; 0\}$. Az egyenletet szorozzuk a nevezőkkel.

$$x(x+1) + p(x+2)x + q(x+2)(x+1) = 0$$

A rendezés után kapott

$$(1 + p + q)x^2 + (1 + 2p + 3q)x + 2q = 0$$

egyenlet másodfokú (*) szerint, valamint ugyanezért (az egyébként is kizárt) 0 nem gyöke.



Így ennek a másodfokú egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív, ha a másik gyöke negatív.

Ez akkor és csak akkor áll fenn, ha a gyökök szorzata negatív. A Viète formulák szerint

$x_1 x_2 = \frac{2q}{(1+p+q)}$. E tört számlálója és nevezője a feltételből levezetett (*) egyenlőtlenség szerint ellentétes előjelű. Tehát a (2) egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív.

Érdekesség: Az 1930-as KöMaL Erdős Pál (1913-1996) 8. osztályos (ma 12. osztályos) középiskolás megoldását közölte.

18. A c valós paraméter mely értékeire lesz a $6x^4 - 5x^3 + cx^2 - 5x + 6 = 0$ egyenletnek négy különböző valós gyöke?

Megoldás:

A 0 nem gyöke az egyenletnek, ezért x^2 -tel osztással az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk:

$$6x^2 - 5x + c - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0.$$

Rendezzük át!

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Legyen $y = x + \frac{1}{x}$. Ezzel $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, és egyenletünk

$$6y^2 - 5y + c - 12 = 0.$$

Ismert, hogy minden 0-tól különböző x -re $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$, és az $x + \frac{1}{x} = 2$ egyenletnek csak az 1, az $x + \frac{1}{x} = -2$ egyenletnek csak a -1 a gyöke, valamint $|y| > 2$ esetén az $x + \frac{1}{x} = y$ egyenletnek két különböző megoldása van.

Ezért az eredeti negyedfokú egyenletnek pontosan akkor van négy különböző valós gyöke, ha az $f(y) = 6y^2 - 5y + c - 12$ függvénynek két 2-nél nagyobb abszolútértékű zérushelye van.

$$6y^2 - 5y + c - 12 = 0 \text{ gyökei: } y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24(c-12)}}{12} = \frac{5}{12} \pm \frac{\sqrt{D}}{12}$$

(D az egyenlet diszkriminánsa. $D > 0$, ha $c < \frac{313}{12}$)

A másodfokú függvény zérushelyei az $\frac{5}{12}$ -re szimmetrikusak, ezért nem lehet a kisebbik gyök

2-nél nagyobb és a nagyobbik se lehet -2 -nél kisebb. Tehát az abszolútértékük pontosan akkor nagyobb 2-nél, ha a kisebbik -2 -nél kisebb, a nagyobbik 2-nél nagyobb. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $f(-2) < 0$ és $f(2) < 0$.

$$f(-2) = 24 + 10 + c - 12 < 0 \Leftrightarrow c < -22$$

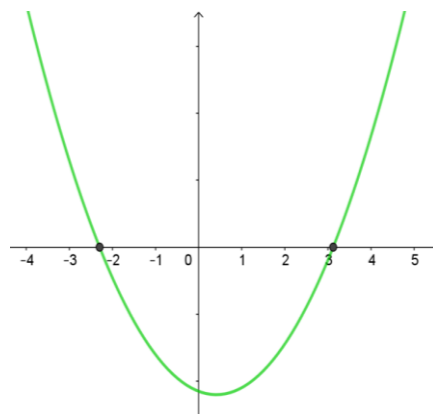
$$f(2) = 24 - 10 + c - 12 < 0 \Leftrightarrow c < -2$$

Tehát a negyedfokú egyenletnek négy különböző valós gyöke van, ha $c < -22$.

Megjegyzés:

Abból, hogy a másodfokú függvény gyökei szimmetrikusak az $\frac{5}{12}$ -re, következik, hogy $f(2) < f(-2) < 0$ ezért elég az

$f(-2) < 0$ egyenlőtlenséget megoldani.



19. Határozza meg, hogy a p valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$x^4 + (p + 1)x^2 + p^2 + 2p + \frac{1}{4} = 0$$

egyenlet megoldáshalmaza pontosan két valós számot tartalmazzon!

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 2001.

Megoldás:

$y = x^2$ bevezetésével az egyenlet $y^2 + (p + 1)y + p^2 + 2p + \frac{1}{4} = 0$ alakra hozható. A fenti negyedfokú egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós gyöke, ha a másodfokú egyenletnek

- a) vagy egy valós gyöke van, ami pozitív
- b) vagy az egyik gyöke pozitív, a másik negatív.

a) Egy valós gyöke van, ha a diszkriminánsa 0.

$$D = (p + 1)^2 - 4\left(p^2 + 2p + \frac{1}{4}\right) = -3p^2 - 6p$$

$D = 0$, ha $p = 0$ vagy $p = -2$.

Ha $p = 0$, akkor $y^2 + y + \frac{1}{4} = 0$, $y = -\frac{1}{2}$. Ez negatív, így az eredeti egyenletnek nincs megoldása.

Ha $p = -2$, akkor $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Az 1 főegyütthatójú másodfokú egyenletnek pontosan akkor van két ellentétes előjelű gyöke ha a másodfokú egyenletben a konstans negatív, azaz $p^2 + 2p + \frac{1}{4} < 0$. (Lásd a Kidolgozott 8/e feladat megoldását.)

Ez akkor áll fenn, ha $\frac{-2-\sqrt{3}}{2} < p < \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$.

Tehát a negyedfokú egyenlet megoldáshalmaza pontosan akkor tartalmaz két valós számot, ha

$$p \in \left] \frac{-2-\sqrt{3}}{2}; \frac{-2+\sqrt{3}}{2} \right[\cup \{-2\}.$$

20. a) Mutassuk meg, hogy az $x^4 - (k + 3)x^3 - (k - 11)x^2 + (k + 3)x + (k - 12) = 0$

egyenlet két gyöke nem függ k -tól.

b) A további két gyök k mely értékei mellett lesz valós?

KöMaL 1961. február, 1088. feladata

Megoldás:

a) **I. megoldás:**

Vegyük észre, hogy az $x^4 - (k + 3)x^3 - (k - 11)x^2 + (k + 3)x + (k - 12) = 0$ egyenletben az együtthatók összege 0, ezért $x = 1$ gyöke az egyenletnek. Továbbá x páros és

páratlan kitevőjű hatványai együtthatóinak az összege külön-külön is 0, ezért (-1) is gyök. Ezek k -tól nem függenek. Ezzel az állítást igazoltuk.

II. megoldás:

A k -t nem tartalmazó tagokat különválasztva az egyenlet:

$$(x^4 - 3x^3 + 11x^2 + 3x - 12) - k(x^3 + x^2 - x - 1) = 0$$

A k -tól független gyökre mindkét zárójelben szereplő polinom helyettesítési értéke 0 kell legyen. A második csoportosítással szorzattá alakítható:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2.$$

Ez csak $x = 1$ -re és $x = -1$ -re tűnik el. Ezek a k -t nem tartalmazó polinomnak is gyökei.

III. megoldás:

A k -tól független gyök csak azok közül kerülhet ki, amelyeket a k egy tetszés szerint választott értékével kapott egyenletből kapunk. Célszerű $k = -3$ -at választani, mert ezzel egy másodfokúra redukálható negyedfokú egyenletet kapunk: $x^4 + 14x^2 - 15 = 0$. Ennek valós gyökei az $x^2 = 1$ gyökei. ($x^2 = -15$ nem ad valós gyököt.) Ellenőrizhető: a kapott két gyök, 1 és -1 , minden k -ra megoldás.

b) I. megoldás:

A további két gyök vizsgálatához osszuk az egyenletet a talált gyökökhöz tartozó gyöktényezők $(x + 1)(x - 1) = (x^2 - 1)$ szorzatával. Ez megtehető polinomosztással, vagy az a) II. megoldásában látott ötlettel. Mi ez utóbbi módszert használjuk:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 + 11x^2 + 3x - 12 &= (x^4 + 11x^2 - 12) - 3x(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 12) - 3x(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 - 3x + 12). \end{aligned}$$

Ezt és a korábbi szorzattá alakítást felhasználva:

$$\begin{aligned} &x^4 - (k + 3)x^3 - (k - 11)x^2 + (k + 3)x + (k - 12) = \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 3x + 12) - k(x^2 - 1)(x + 1) = (x^2 - 1)(x^2 - 3x + 12 - kx - k) = \\ &= (x^2 - 1)[x^2 - (k + 3)x - (k - 12)] \end{aligned}$$

Tehát a további gyökök az $x^2 - (k + 3)x - (k - 12) = 0$ egyenlet gyökei. Ezek akkor valósak, ha a diszkrimináns nem negatív. $D = (k + 3)^2 + 4(k - 12) = k^2 + 10k - 39$.

$$k^2 + 10k - 39 = 0, \text{ ha } k = -13 \text{ vagy ha } k = 3.$$

$$D \geq 0, \text{ ha } k \in]-\infty; -13] \cup [3; +\infty[.$$

II. megoldás:

Ha az egyenletnek van még két valós gyöke, a és b , akkor a negyedfokú egyenlet gyöktényezőssé alakja: $(x - 1)(x + 1)(x - a)(x - b) = 0$. A szorzásokat elvégezve kapjuk: $x^4 - (a + b)x^3 + (ab - 1)x^2 + (a + b)x - ab = 0$. Ezt az eredetivel összevetve az

$$\begin{aligned} a + b &= k + 3 \\ ab &= 12 - k \end{aligned}$$

másodfokú paraméteres egyenletrendszerhez jutunk.

$$b = k + 3 - a$$

$$a(k + 3 - a) = 12 - k$$

$$a^2 - (k + 3)a + (12 - k) = 0$$

A másodfokú egyenletnek akkor van megoldása a valós számok halmazán, ha $D \geq 0$. Az I. megoldás alapján kapjuk: $k \in]-\infty; -13] \cup [3; +\infty[$.

21. Melyek azok a p pozitív prímszámok, amelyekre a

$$(1) \quad p + 1 = 2x^2$$

$$(2) \quad p^2 + 1 = 2y^2$$

egyenletrendszernek van egész megoldása?

Arany Dániel Matematika Tanulóverseny 2013/2014, Haladók III. kategória, 1. forduló

Megoldás:

Az egyenletrendszerben x -nek és y -nak csak a második hatványa szerepel, ezért ha x gyök, akkor $-x$ is az, hasonlóan y -nal együtt $-y$ is gyök. Ezért elég $x > 0$, $y > 0$ számokra szorítkozni.

$p > 1$, ezért $p^2 > p$ és $y > x (> 0)$.

A (2) és az (1) egyenlet különbségét kettővel osztjuk, majd mindkét oldalt szorzattá alakítjuk:

$$(y - x)(y + x) = p \cdot \frac{(p-1)}{2}.$$

$p = 2$ nem lehet, mert a $3 = 2x^2$ (és az $5 = 2y^2$) egyenlet gyökei nem egészek.

Így p páratlan prímszám, ezért $\frac{(p-1)}{2}$ pozitív egész szám.

Ha egy prímszám egész számok szorzatának osztója, akkor osztója valamelyik tényezőnek.

Itt $p|(y - x)$ vagy $p|(y + x)$.

$y > 1$ miatt a (2) egyenlet alapján $p > y$, ezért $p \nmid (y - x)$, tehát $p|(y + x)$.

Ez $2p > 2y > y + x > 1$ miatt csak úgy lehet, ha $p = y + x$. Tehát

$$\begin{aligned} & y + x = p \\ \text{és} \quad & y - x = \frac{(p-1)}{2} \end{aligned}$$

Az egyenletrendszerből y -t kifejezzük és behelyettesítjük a (2) egyenletbe.

$$y = \frac{3p-1}{4}$$

$$p^2 + 1 = 2 \cdot \left(\frac{3p-1}{4} \right)^2.$$

Rendezés után kapjuk a

$$p^2 - 6p - 7 = 0$$

egyenletet. Ennek két gyöke (7 és -1) közül csak a 7 prímszám.

Ha $p = 7$, akkor $x^2 = 4$ és $y^2 = 25$; az egyenletrendszer megoldásai a $(2; 5), (2; -5), (-2; 5), (-2; -5)$ számpárok.

22. Az m paraméter mely egész értékénél lesz a

$$9^x + 2(m + 3) \cdot 3^x + m^2 = 22$$

egyenletnek két különböző gyöke a valós számok halmazán? Adja meg a lehetséges gyökök számértékét is!

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1993.

Megoldás:

Az egyenlet (3^x) –ben másodfokú. Legyen $y = 3^x$.

$f(x) = 3^x$ függvény szigorúan monoton nő, értékkészlete a pozitív számok halmaza, ezért az eredeti egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós gyöke, ha az

$$y^2 + 2(m + 3) \cdot y + m^2 - 22 = 0.$$

egyenletnek két különböző pozitív gyöke van.

A másodfokú egyenletnek akkor van két különböző pozitív gyöke, ha a következő három feltétel egyszerre teljesül:

a) a másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív.

$$D = 4(m + 3)^2 - 4(m^2 - 22) = 24m + 124. \quad D > 0, \text{ ha } m > -\frac{31}{6}$$

b) a gyökök összege pozitív: $y_1 + y_2 = -2(m + 3) > 0$, ebből $m < -3$.

c) a gyökök szorzata pozitív: $y_1 \cdot y_2 = m^2 - 22 > 0$. Ez teljesül, ha

$$m < -\sqrt{22} \quad \text{vagy} \quad m > \sqrt{22}$$

Ezek mindegyike akkor áll fenn, ha $m \in \left] -\frac{31}{6}; -\sqrt{22} \right[$. Ez egyetlen egész számra teljesül: $m = -5$.

$$m = -5 \text{ esetén } y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 1, x_1 = 0; \quad y_2 = 3, x_2 = 1.$$

Az egyenlet gyökei a 0 és az 1.

23. Mely valós számokra igaz a

$$\log_m x + \log_{mx} x + (\log_m x) \cdot \log_{\frac{m}{x}} x > 0$$

egyenlőtlenség, amelyben m valós paraméter?

Írásbeli érettségi-felvételi feladat 1997.

Megoldás:

A logaritmus definíciója alapján $x > 0$, $m > 0$, $m \neq 1$, $mx \neq 1$, $\frac{m}{x} \neq 1$.

A kifejezéseket közös, m alapú logaritmusra írjuk át az

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (a > 0, b > 0, x > 0, a \neq 1, b \neq 1)$$

azonosság felhasználásával.

$$\log_m x + \frac{\log_m x}{\log_m mx} + \log_m x \cdot \frac{\log_m x}{\log_m \frac{m}{x}} > 0$$

Kiemeljük a közös $\log_m x$ tényezőt és alkalmazunk a logaritmus azonosságait, majd közös nevezőre hozzuk a törtet.

$$\log_m x \cdot \left(1 + \frac{1}{1 + \log_m x} + \frac{\log_m x}{1 - \log_m x} \right) > 0$$

$$\log_m x \cdot \frac{1 - \log_m^2 x + 1 - \log_m x + \log_m x + \log_m^2 x}{1 - \log_m^2 x} > 0$$

$$\log_m x \cdot \frac{2}{1 - \log_m^2 x} > 0$$

A két tényezős szorzat pozitív, ha a tényezők azonos előjelűek.

$$I. \log_m x > 0 \text{ és } 1 - \log_m^2 x > 0 \quad \text{vagy} \quad II. \log_m x < 0 \text{ és } 1 - \log_m^2 x < 0.$$

$$I. 1 - \log_m^2 x > 0, \text{ ha } \log_m^2 x < 1.$$

A két feltétel egyszerre teljesül, ha $0 < \log_m x < 1$ azaz, ha

$$\log_m 1 < \log_m x < \log_m m$$

$m > 1$ esetén (az m alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő), $1 < x < m$

$0 < m < 1$ esetén (az m alapú logaritmus függvény szigorúan monoton csökken),
 $m < x < 1$

II. $\log_m x < 0$ és $1 - \log_m^2 x < 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\log_m x < -1$, azaz ha

$$\log_m x < \log_m \frac{1}{m}$$

$m > 1$ esetén (az m alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő), $0 < x < \frac{1}{m}$

$0 < m < 1$ esetén (az m alapú logaritmus függvény szigorúan monoton csökken),

$$x > \frac{1}{m}.$$

Tehát az egyenlőtlenségnek csak akkor van megoldása, ha $m \in]0; +\infty[\setminus \{1\}$.

Az egyenlőtlenség megoldása,

ha $m > 1$, akkor $x \in]0; \frac{1}{m}[\cup]1; m[$,

ha $0 < m < 1$, akkor $x \in]m; 1[\cup]\frac{1}{m}; +\infty[$.

24. Igazoljuk, hogy van olyan pont a síkon, amelyre a p paraméter minden értéke esetén illeszkedik az $y = (p + 1)x^2 - (3p + 2)x - 3$ egyenletű görbe!

I. Megoldás:

Az $y = (px^2 - 3px) + x^2 - 2x - 3$ átalakítás után csak az első tag függ p -től.

$px^2 - 3px = px(x - 3)$, és ezzel az egész kifejezés p -től független, ha $x(x - 3) = 0$. $x = 0$ esetén $y = -3$, $x = 3$ esetén $y = 0$. Tehát a $(0; -3)$ és a $(3; 0)$ pontok illeszkednek a fenti egyenlettel megadott görbékre. Ez $p = -1$ esetén egyenes, $p \neq -1$ esetén parabola.

II. Megoldás:

Helyettesítsünk be két értéket p helyére:

Ha $p = -1$, akkor $y = x - 3$, ha $p = 0$, akkor $y = x^2 - 2x - 3$. Ha van olyan pont, amelyre p -től függetlenül mindegyik görbe illeszkedik, akkor az megoldása az

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszernek. Így $x - 3 = x^2 - 2x - 3$, amiből $x = 0$ vagy $x = 3$. Ha van olyan pont, amelyen átmennék a görbék, csak a $(0; -3)$ és a $(3; 0)$ pontok lehetnek.

Behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy ezekre illeszkedik-e minden görbe:

Ha $x = 0$, akkor $y = -3$ és

ha $x = 3$, akkor $y = (p + 1) \cdot 9 - (3p + 2) \cdot 3 - 3 = 9p + 9 - 9p - 6 - 3 = 0$,

tehát ezen a két ponton valóban átmegy mindegyik görbe.

25. Határozza meg az n egész paraméter értékét, ha egy háromszög a, b, c oldalaira:

$$\begin{aligned} a + b &= 2n + 2 \\ a + c &= 2n + 4 \\ b + c &= 2n + 6 \end{aligned}$$

Legfeljebb mekkora lehet a háromszög legnagyobb szöge?

Megoldás:

Adjuk össze az egyenleteket! $2(a + b + c) = 6n + 12$. Innen az oldalak összege $3n + 6$, valamint $a = 3n + 6 - (b + c) = n$, $b = n + 2$, $c = n + 4$. A háromszög oldalainak mérőszáma pozitív, ezért $n > 0$.

A háromszög leghosszabb oldala c . A háromszög egyenlőtlenség $(a + b > c)$ szerint $2n + 2 > n + 4$, azaz $n > 2$, vagy másképp $n \geq 3$.

A háromszög legnagyobb szöge a leghosszabb oldallal szemben fekszik, ezért a leghosszabb oldalra írjuk fel a koszinusztételt.

$$(n + 4)^2 = (n + 2)^2 + n^2 - 2n(n + 2)\cos\gamma,$$

A háromszög legnagyobb (γ) szögére

$$\cos \gamma = \frac{(n+2)^2 + n^2 - (n+4)^2}{2n(n+2)} = \frac{n^2 - 4n - 12}{2n(n+2)} = \frac{(n+2)(n-6)}{2n(n+2)} = \frac{n-6}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{3}{n}.$$

Mivel $n \geq 3$, ezért $0 < \frac{3}{n} \leq 1$, $-1 \leq -\frac{3}{n} < 0$, $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} < \frac{1}{2}$. Így

$$-\frac{1}{2} \leq \cos \gamma < \frac{1}{2}$$

Felhasználva, hogy a koszinuszfüggvény a $]0^\circ; 180^\circ[$ intervallumban szigorúan monoton csökken, a háromszög legnagyobb szöge legfeljebb 120° lehet.

Ez a lehetőség megvalósul $n = 3$ esetén. Ekkor a háromszög oldalai 3, 5 és 7 egység hosszúak.

26. A p valós paraméter mely értékei mellett található olyan x valós szám, hogy a

$$3^{2+x} + 3^{2-x}, \quad p, \quad 9^x + 9^{-x}$$

egy számtani sorozat három egymást követő tagja legyen?

I. Megoldás:

A számtani sorozat három szomszédos tagja közül a középső, a két szomszédos tag számtani közepe:

$$p = \frac{(3^{2+x} + 3^{2-x}) + (9^x + 9^{-x})}{2}$$

Keressük azokat a p valós számokat, amelyekre a

$$2p = 3^{2+x} + 3^{2-x} + 9^x + 9^{-x} \quad (*)$$

egyenletnek van (valós) megoldása.

Minden x -re $3^x > 0$ és $9^x > 0$, és tudjuk, hogy $y > 0$ esetén $y + \frac{1}{y} \geq 2$. Így a jobb oldal

$$9 \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right) + \left(9^x + \frac{1}{9^x} \right) \geq 9 \cdot 2 + 2 = 20.$$

Tehát csak $p \geq 10$ esetén lehet megoldása az egyenletnek.

Hátra van annak vizsgálata, hogy minden $p \geq 10$ esetén van-e megoldása a

$$2p = 9 \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right) + 9^x + \frac{1}{9^x}$$

egyenletnek.

$a = 3^x + \frac{1}{3^x}$ bevezetésével $9^x + \frac{1}{9^x} = a^2 - 2$. Ellenőrizzük, hogy az

$$a^2 + 9a - 2 - 2p = 0$$

másodfokú egyenletnek $p \geq 10$ esetén van-e olyan gyöke, amelyik legalább 2-vel egyenlő.

$$a_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 8 + 8p}}{2}.$$

Megvizsgáljuk, hogy a pozitív gyök $a_2 = \frac{-9 + \sqrt{81 + 8 + 8p}}{2} \geq 2$ fennáll-e, ha $p \geq 10$.

$p \geq 10$ esetén $89 + 8p \geq 89 + 80 = 169$, így $a_2 \geq \frac{-9 + 13}{2} = 2$.

Tehát ha $p \geq 10$, akkor van az (*) egyenletnek valós megoldása, azaz $p \geq 10$ esetén van olyan x valós szám, amelyre az adott kifejezések egy számtani sorozat három szomszédos tagjai.

II. Megoldás

A számtani sorozat három szomszédos tagja közül a középső, a két szomszédos tag számtani közepe:

$$p = \frac{(3^{2+x} + 3^{2-x}) + (9^x + 9^{-x})}{2}$$

Keressük azokat a p valós számokat, amelyekre a

$$2p = 3^{2+x} + 3^{2-x} + 9^x + 9^{-x}$$

egyenletnek van (valós) megoldása.

Ez a probléma egyenértékű a $3^{2+x} + 3^{2-x} + 9^x + 9^{-x}$ kifejezés értékkészletének vizsgálatával.

$$3^{2+x} + 3^{2-x} = 9(3^x + 3^{-x}), \quad (3^x + 3^{-x})^2 = 9^x + 9^{-x} + 2$$

$$\text{miatt} \quad 2p = (3^x + 3^{-x})^2 + 9(3^x + 3^{-x}) - 2$$

Legyen $a = 3^x + 3^{-x}$. Mivel $3^x > 0$, ezért $3^x + 3^{-x} \geq 2$, $a \geq 2$.

Az $f: [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $f(a) = a^2 + 9a - 2$ függvény értékkészletét keressük.

$$\begin{aligned} \text{Az } f(a) &= a^2 + 9a - 2 = (a + 4,5)^2 - 20,25 - 2 \\ &= (a + 4,5)^2 - 22,25 \end{aligned}$$

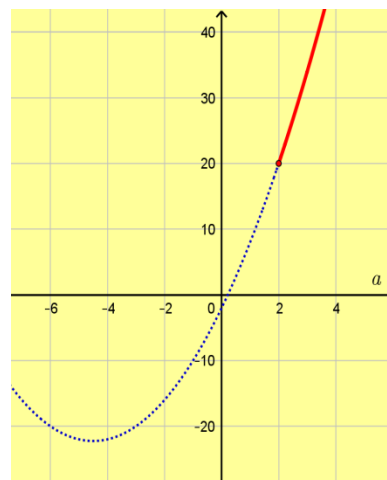
folytonos függvény a $[2; +\infty[$ intervallumon szigorúan monoton nő, így

$$f(a) \geq f(2) = 6,5^2 - 22,25 = 42,25 - 22,25 = 20,$$

valamint tetszőleges nagy értéket felvesz.

Tehát a függvény értékkészlete $[20; +\infty[$ azaz $p \geq 10$.

$p \geq 10$ esetén van olyan x valós szám, amelyre az adott kifejezések egy számtani sorozat három szomszédos tagjai.



27. Határozza meg a következő függvény értékkészletét!

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = 3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x$$

Megoldás:

Az értékkészlet vizsgálatát paraméteres egyenlet megoldására vezetjük vissza. Felhasználjuk hogy egy f függvény értékkészlete azon p valós számok halmaza, amelyekre az $f(x) = p$ egyenletnek van megoldása.

Oldjuk meg a $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = p$ paraméteres egyenletet.

A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot alkalmazzuk:

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = p \cdot \sin^2 x + p \cdot \cos^2 x.$$

0-ra rendezzük: $(3 - p) \cdot \sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + (5 - p) \cdot \cos^2 x = 0$.

$p = 3$ esetén $2\cos x(-2\sin x + \cos x) = 0$. Ennek az egyenletnek végtelen sok megoldása van, pl.: a $\cos x = 0$ egyenlet gyökei. Ezért a 3 eleme a függvény értékkészletének.

Ha $p \neq 3$, akkor a $\cos x = 0$ egyenlet gyökei nem megoldások (hiszen akkor ezek egyben a $\sin x = 0$ egyenletnek is gyökei lennének). Mivel a $\cos x = 0$ egyenlet gyökei nem megoldásai az egyenletnek, ezért $\cos^2 x$ -szel osztáskor nem veszünk gyököt.

$$(3 - p) \cdot \operatorname{tg}^2 x - 4 \cdot \operatorname{tg} x + (5 - p) = 0$$

Tekintettel, hogy $p \neq 3$, egyenletünk $\operatorname{tg} x$ -re másodfokú. Ennek akkor van valós megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa nem negatív. (Ha $\operatorname{tg} x$ -re van megoldása, akkor mivel a függvény értékkészlete a valós számok halmaza, ezért az eredeti egyenletnek is van megoldása.)

$$16 - 4(3 - p) \cdot (5 - p) \geq 0$$

$$16 - 4(3 - p) \cdot (5 - p) = 16 - 60 + 32p - 4p^2 = 4(-p^2 + 8p - 11)$$

$$\text{Tehát megoldandó: } -p^2 + 8p - 11 \geq 0$$

A $-p^2 + 8p - 11 = 0$ egyenlet gyökei:

$$p_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 44}}{-2} \begin{cases} = 4 + \sqrt{5} \\ = 4 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Az egyenlőtlenség megoldása:

$$4 - \sqrt{5} \leq p \leq 4 + \sqrt{5}, \text{ feltéve } p \neq 3$$

Összegezve: a függvény értékkészlete $[4 - \sqrt{5}; 4 + \sqrt{5}]$.

28. Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl.)

Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x = 1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek?

Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x = 1$ a függvénynek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye!

Igazolja, hogy k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye!

Emelt szintű érettségi 2008. május 6.

Megoldás:

A valós számok halmazán értelmezett differenciálható függvénynek ott lehet szélsőérték-helye, ahol a deriváltja 0. $f'(x) = 3x^2 + 2kx + 9$. A feltétel szerint $f'(1) = 0$.

$$3 + 2k + 9 = 0, \text{ ha } k = -6.$$

$$\text{Ha } k = -6, \text{ akkor } f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

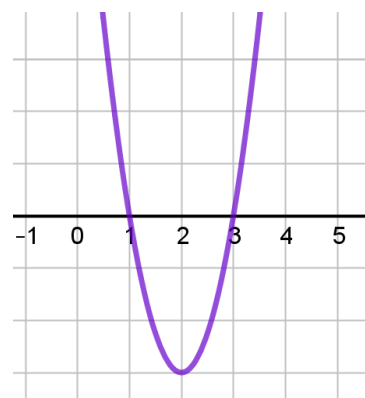
$3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 3)(x - 1)$, ezért $f'(x) = 0$, ha $x = 1$ vagy ha $x = 3$. $f'(x)$ másodfokú függvény $x = 1$ helyen $+/-$ jelváltó, $x = 3$ helyen $-/+$ jelváltó.

Ezért a függvénynek $x = 1$ lokális maximumhelye, $x = 3$ pedig lokális minimumhelye.

Megjegyzés:

A szélsőértékhely típusát a második derivált előjel-vizsgálatával is megállapíthatjuk: $f''(x) = 6x - 12$.

$f''(1) = -6 < 0$ illetve $f''(3) = +6 > 0$, ezért az 1 lokális maximum-, a 3 pedig lokális minimumhely.



29. Határozza meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvényben az a, b és c valós paraméterek értékét, ha a függvényről tudjuk a következőket:

- (1) $f(1) = f(-1) + 4$;
- (2) $f'(3) = 10$ (f' az f deriváltfüggvénye);
- (3) $\int_0^2 f(x) dx = -8$.

Emelt szintű érettségi 2014. május 7.

Megoldás:

(1) szerint

$$f(1) = f(-1) + 4$$

$$1 + a + b + c = -1 + a - b + c + 4$$

$$\text{ebből } b = 1.$$

(2) szerint

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(3) = 27 + 6a + 1 = 10$$

$$\text{innen } a = -3.$$

$$(3) \text{ szerint } \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 1x + c) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + cx \right]_0^2 = 4 - 8 + 2 + 2c - 0 = 2c - 2$$

$$2c - 2 = -8, \text{ azaz } c = -3.$$

30. Az a valós paraméterrel adott az alábbi egyenlet, jelölje az egyenlet valós gyökeit x_1 és x_2 :

$$2x^2 - 3(a + 2)x + 9a + 1 = 0.$$

- a) Határozzuk meg a értékét úgy, hogy az $x_1^2 + x_2^2$ kifejezés értéke minimális legyen.
- b) Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan valós a érték, amely esetén x_1 és x_2 is egész szám.
- c) Keressük meg az a paraméter olyan egész értékeit, melyek esetén az egyenletnek egyik gyöke egész.

OKTV 2006/2007, II. kategória, I. forduló

Megoldás:

- a) A gyökök négyzetének összege kifejezhető a gyökök összege és szorzata segítségével. Ezekhez alkalmazzuk a Viète formulákat:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{3a+6}{2}\right)^2 - 2\frac{9a+1}{2} = \frac{9a^2 + 36a + 36 - 36a - 4}{4}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}(9a^2 + 32).$$

A gyökök négyzetének összege minimális, ha $a = 0$.

$a = 0$ esetén az egyenlet: $2x^2 - 6x + 1 = 0$. Ennek gyökei (valósak):

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$$

ezek négyzetének összege: $\frac{18+14}{4} = 8$.

- b) Ha x_1 és x_2 is egész szám, akkor ezek összege és szorzata is egész, tehát

$$\frac{3a+6}{2} \text{ és } \frac{9a+1}{2} \text{ egészek.}$$

Az első tört pontosan akkor egész, ha a páros, a második akkor, ha a páratlan egész szám. Ezek egymást kizáró feltételek, ezért nincs olyan a valós szám, amelyre mindkét gyök egész szám lenne.

c) I. megoldás:

Legyen a egész szám és az egyenlet egyik gyöke egész. Jelöljük ezt a gyököt x_0 -lal.

$$2x_0^2 - 3(a+2)x_0 + 9a + 1 = 0$$

$$2x_0^2 - 3ax_0 - 6x_0 + 9a + 1 = 0$$

Átrendezzük az egyenletet: $2x_0(x_0 - 3) - 3a(x_0 - 3) + 1 = 0$, majd az első két tagot szorzattá alakítjuk:

$$(2x_0 - 3a)(x_0 - 3) + 1 = 0. \quad (*)$$

Ennek az egyenletnek $x_0 = 3$ nem megoldása, mert $1 \neq 0$. Ezért nem veszünk gyököt, ha $(x_0 - 3)$ -mal osztunk.

$$2x_0 - 3a + \frac{1}{x_0 - 3} = 0 \Rightarrow 3a = 2x_0 + \frac{1}{x_0 - 3}$$

Mivel a és x_0 egész, ezért $\frac{1}{x_0 - 3}$ is egész szám. Ez csak úgy lehet, ha $x_0 - 3 = 1$ vagy ha $x_0 - 3 = -1$. Az első esetben $x_0 = 4$, $a = 3$, a másodikban $x_0 = 2$ és $a = 1$. Ezek a feladat megoldásai.

Megjegyzés:

A (*) átrendezésével kapott $(2x_0 - 3a)(x_0 - 3) = -1$ egyenlet baloldalán álló két tényező, a feltételek szerint, egész szám. A szorzat csak úgy lehet -1 -gyel egyenlő, ha tényezők egyike 1 a másik -1 . A két eset vizsgálatából a fenti megoldások adódnak.

II. megoldás:

Ha a $2x^2 - 3(a+2)x + 9a + 1 = 0$ egyenlet egyik gyöke és a egész szám, akkor a diszkrimináns biztosan egy egész szám négyzete: $D = 9a^2 - 36a + 28 = e^2$ (Feltéhetjük: $e \geq 0$.)

$$(3a - 6)^2 - 8 = e^2$$

Így $(3a - 6)^2 - e^2 = 8$. Mindkét oldalt két tényező szorzattá alakítjuk:

$$(3a - 6 - e)(3a - 6 + e) = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4 = -8 \cdot (-1) = -4 \cdot (-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3a - 6 - e = 1 \\ 3a - 6 + e = 8 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3a - 6 - e = 2 \\ 3a - 6 + e = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3a - 6 - e = -8 \\ 3a - 6 + e = -1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3a - 6 - e = -4 \\ 3a - 6 + e = -2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} 6a - 12 = 9 & 6a - 12 = 6 & 6a - 12 = -9 & 6a - 12 = -6 \\ a \text{ nem egész} & a = 3, e = 1 & a \text{ nem egész} & a = 1, e = 1 \end{array}$$

$a = 3$ esetén az egyenlet $2x^2 - 15x + 28 = 0$ és gyökei: 3,5 és 4,

$a = 1$ esetén az egyenlet $2x^2 - 9x + 10 = 0$ és gyökei: 2 és 2,5.

Mindkét esetben az egyenlet egyik gyöke egész szám.