

PPKE - ITK

MATEMATIKAI MÓDSZEREK A KÖZÉPISKOLAI FIZIKA TANÍTÁSÁBAN

BAKOSNÉ NOVÁK ANDREA

KEMPELEN FARKAS GIMNÁZIUM
BUDAPEST

SZÉCHENYI  2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

A TERMÉSZETTUDOMÁNYOS MEGISMERÉS ÚTJA

- Megfigyelés
- Leírás(mérés, fogalomalkotás)
- Magyarázat
- Általános elmélet megalkotása
- Kísérletezés (következmények ellenőrzése, további tapasztalatok)
- Predikció

„A csoda, a matematika nyelvének alkalmas volta a fizika törvényeinek megfogalmazására, varázslatos adomány”

Wigner Jenő

PROBLÉMÁK

- Széttagolt ismeretanyagok
- Óraszám, tananyagmennyiség
- Diákok hozzáállása
- Tanult ismeretek összekapcsolása a gyakorlati élettel
- A fizika gyakran megelőzi a matematikát
- A kapcsolódási pontok kihasználatlanok

LEHETŐSÉGEK, AZAZ MIBEN SEGÍTHET A FIZIKA

- Fogalmak alapozása, előkészítése
- Ismétlés, elmélyítés
- Ténylegesen gyakorlati alkalmazások
- Szakmai szövegekben matematikai problémák felismerése
- Szeparáció után integráció, komplex gondolkodás fejlesztése
- Rengeteg kapcsolódási pont

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI ISMERETEK

- Középértékek, átlagtól való eltérés
- Törtek
- Hatványok
- Arányosságok
- Függvények
- Egyenletek
- Geometriai ismeretek
- Vektorok
- ...

ÁTLAG, ÁTLAGOS ABSZOLÚT ELTÉRÉS, KERÉKÍTÉS, KÖZÉPÉRTÉKEK

- Mérési adatok, hibaszámítás: átlag, átlagtól való átlagos abszolút eltérés
- Kiegyenlítődő mennyiségek (hőmérséklet, nyomás, ...): súlyozott számtani közép
- Átlagsebesség, átlagsűrűség:
számtani közép, súlyozott számtani közép,
harmonikus közép

ÁTLAG, ÁTLAGOS ABSZOLÚT ELTÉRÉS, KEREKÍTÉS, KÖZÉPÉRTÉKEK

1. Mérétek meg a csoport tagjainak magasságát, majd töltsétek ki a táblázatot a mért adatok alapján.
 - a) Milyen magasak átlagosan az emberek a csoportodban?
 - b) Mennyivel tér el a magasságod a csoportod átlagos magasságától?
 - c) Mennyi a csoporttagok magasságának átlagos eltérése a csoport átlagos magasságától?

Név	1. mérés (cm)	2. mérés (cm)	3. mérés (cm)	Átlagos magasság (cm)	Eltérés a magasságok átlagától (cm)
Magasságok átlaga (cm)					Eltérések átlaga

ÁTLAG, ÁTLAGOS ABSZOLÚT ELTÉRÉS, KERÉKÍTÉS, KÖZÉPÉRTÉKEK

2. Összeöntünk egy liter 40°C -os és két liter 70°C -os vizet egy edénybe. Hány fok lesz a közös hőmérsékletük?

$$T_k = \frac{40^{\circ}\text{C} + 2 \cdot 70^{\circ}\text{C}}{1 + 2} = 60^{\circ}\text{C}$$

3. Egy személygépkocsi két város között útjának harmadát 60 km/h átlagsebességgel 48 perc alatt teszi meg. Az út hátralévő részén a kocsi átlagsebessége 64 km/h volt.
- a) Mekkora a két város távolsága?
 - b) Mekkora volt a személygépkocsi teljes útra vonatkozó átlagsebessége?

Részlet a Sokszínű Matematika 12 tankönyv Középszintű gyakorló feladatsorok fejezetéből: 1. feladatsor 13. feladat a) és b) rész

ÁTLAG, ÁTLAGOS ABSZOLÚT ELTÉRÉS, KEREKÍTÉS, KÖZÉPÉRTÉKEK

a) $\frac{s}{3} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,8\text{h} = 48 \text{ km} \rightarrow s = 144 \text{ km}$

b) Megoldás??? $\bar{v} = \frac{60 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 64 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 64 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{3} = 62 \frac{2}{3} \frac{\text{km}}{\text{h}}$
ROSSZ!!!

Jó megoldás: $t_2 = \frac{96 \text{ km}}{64 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1,5 \text{ h}$

$$\bar{v} = \frac{\text{az összes megtett út}}{\text{az eltelt összes idő}} = \frac{144 \text{ km}}{0,8\text{h} + 1,5\text{h}} = \frac{144 \text{ km}}{2,3 \text{ h}} \approx 62,609 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

HARMONIKUS KÖZÉP!

$$\bar{v}_{\text{harmonikus}} = \frac{3}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}$$

MŰVELETEK TÖRTEKKEL, RECIPROK FOGALMA

- Műveletek mértékegységekkel

$$\frac{m}{s} \leftrightarrow \frac{km}{h} \text{ vagy } \frac{g}{cm^3} \leftrightarrow \frac{kg}{m^3}$$

- Eredő ellenállás (kapacitás)

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

- Leképezési törvény

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI, NORMÁLALAK

- Prefixumok, normál alak
- Töltésmennyiség ($e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$)
- Kapacitás (nF)
- Csillagászat, atomi méretek ($r_{NF} \approx 1,5 \cdot 10^{11} m$)
- Hőtani, elektromágneses, gravitációs állandók, Avogadro-szám

HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI, NORMÁLALAK

4. Határozzuk meg a Boltzmann állandó értékét egy mólnyi normál állapotú gáz állapotjelzőinek ismeretében!

A normál állapotú gáz adatai:

$$p = 100 \text{ kPa} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$V = 22,41 \text{ dm}^3 = 2,241 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$T = 0^\circ \text{C} = 273 \text{ K}$$

$$N = 6 \cdot 10^{23}$$

Boltzmann-állandó értékét a $p \cdot V = N \cdot k \cdot T$ képletből határozhatjuk meg.

HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI, NORMÁLALAK

Megoldás:

Fejezzük ki a képletből a Boltzmann-állandót: $k = \frac{p \cdot V}{N \cdot T}$.

A mértékegység meghatározása:

$$[k] = \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{K}}$$

A képletbe beírva az adatokat:

$$\begin{aligned} k &\approx \frac{10^5 \cdot 2,241 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{m}^3}{6 \cdot 10^{23} \cdot 273 \text{ K}} = \frac{2,241}{6 \cdot 273} \cdot \frac{10^5 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{m}^3}{10^{23} \text{ K}} \\ &\approx 1,37 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-20} \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{K}} = 1,37 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{K}} \end{aligned}$$

HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI, NORMÁLALAK

Eredményünk jó közelítéssel adja az irodalmi adatot:

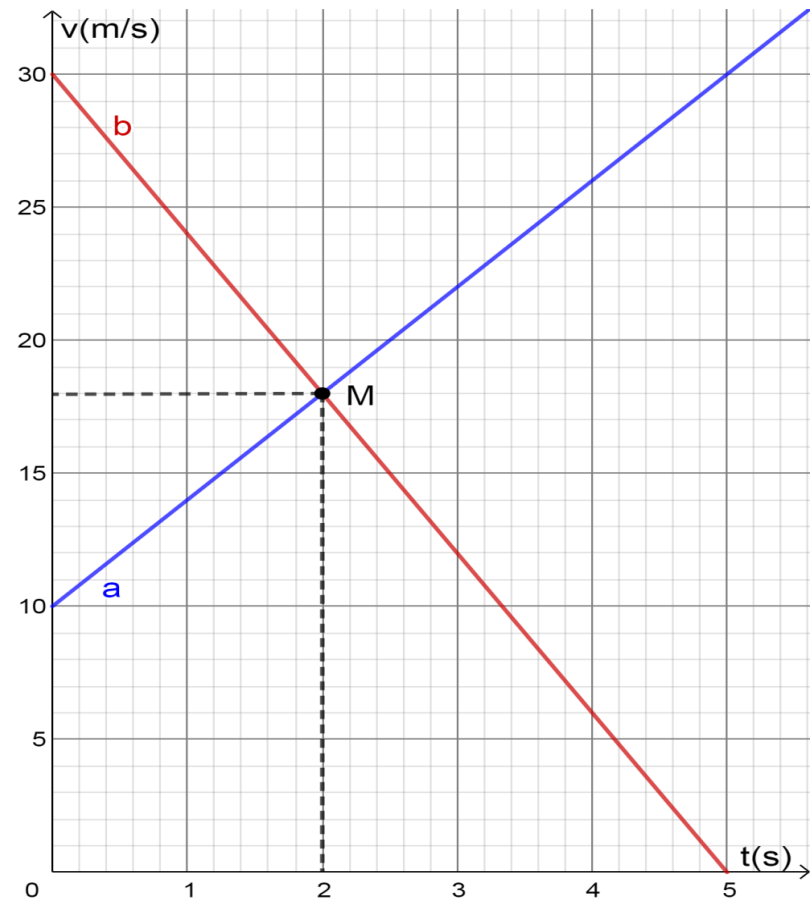
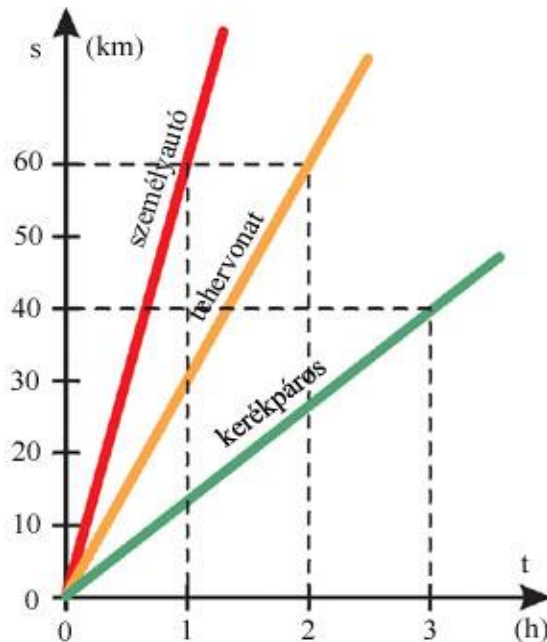
$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}.$$

Az általunk megadott mértékegység és az irodalmi adat mértékegysége megegyezik, mivel:

$$\frac{Pa \cdot m^3}{K} = \frac{\frac{N}{m^2} \cdot m^3}{K} = \frac{Nm}{K} = \frac{J}{K}$$

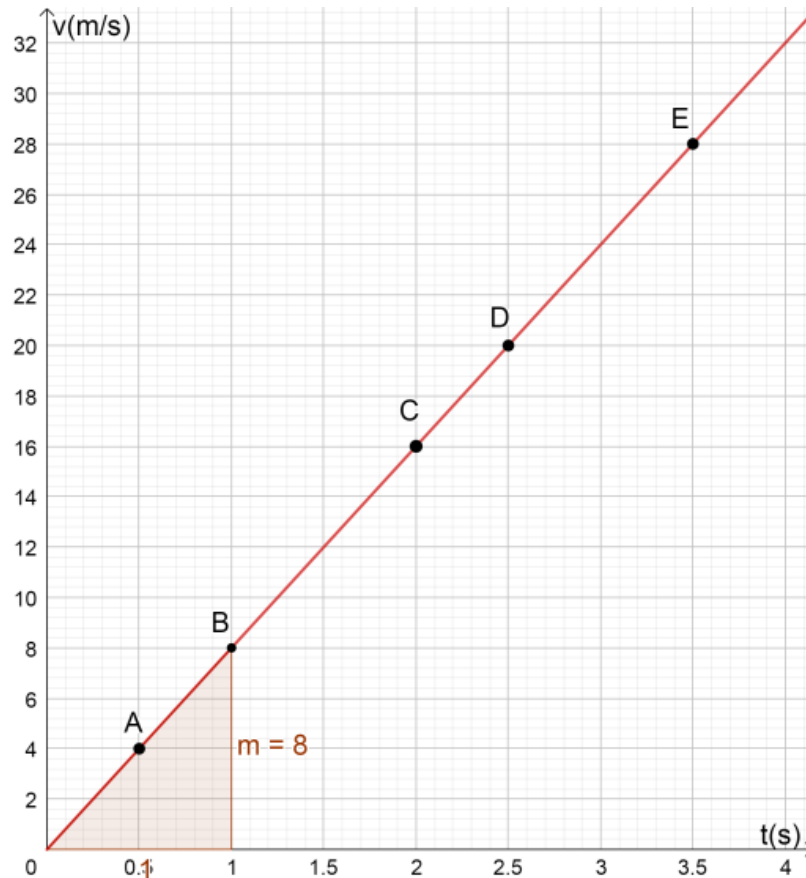
EGYENES ARÁNYOSSÁG, LINEÁRIS FÜGGVÉNY

- Új fogalmak bevezetése (sebesség, gyorsulás, ellenállás, stb.)
- Folyamatok grafikus elemzése



EGYENES ARÁNYOSSÁG, LINEÁRIS FÜGGVÉNY

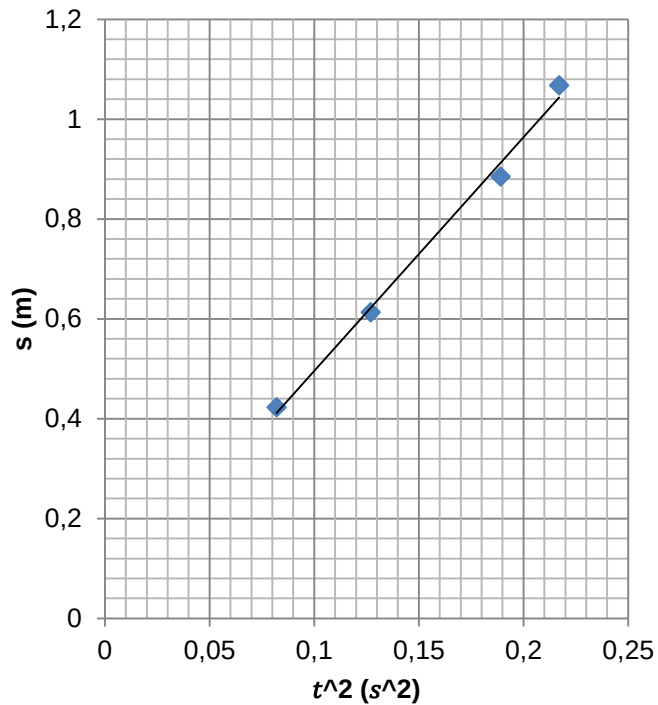
- Folyamatra jellemző állandó és a grafikon meredeksége



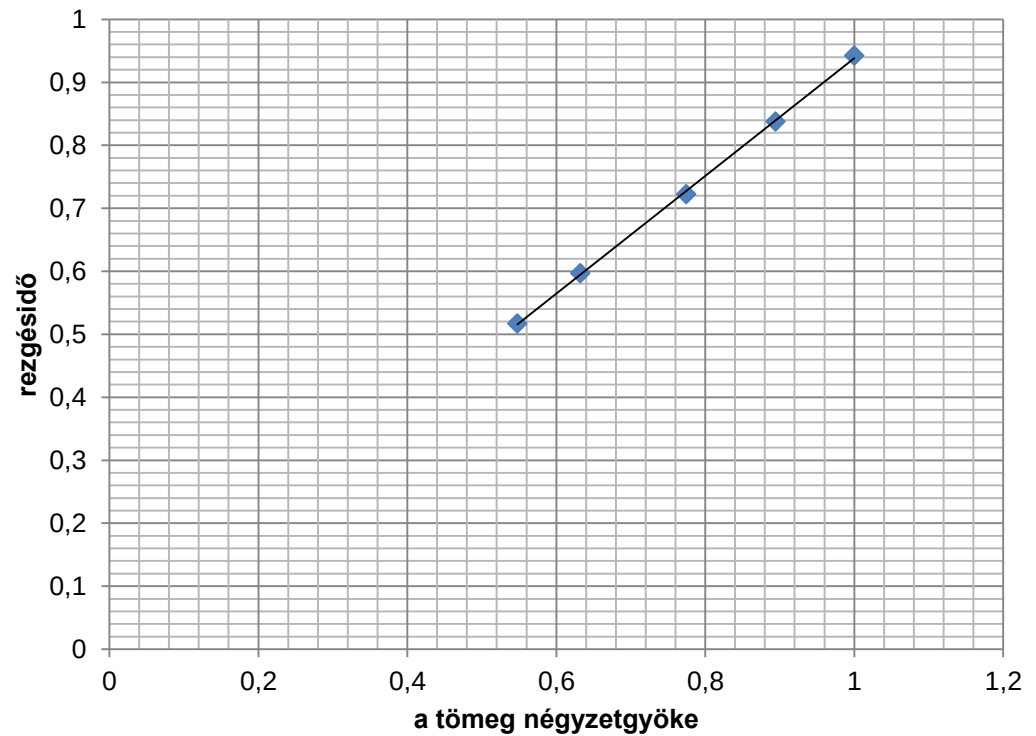
$$v_{pill} = a \cdot \Delta t$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

EGYENES ARÁNYOSSÁG, LINEÁRIS FÜGGVÉNY



$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$$



$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \cdot \sqrt{m}$$

FORDÍTOTT ARÁNYOSSÁG

- Mértékegység átváltás

$$Mennyiség = mérőszám \cdot mértékegység$$

- Új fizikai mennyiség bevezetése

Forgatónyomaték

$$M = k \cdot F$$

- Gázok térfogata és nyomása állandó hőmérsékleten

$$p \cdot V = \text{áll.}$$

EGYENLETRENDEZÉS, EGYENLETMEGOLDÁS, PARAMÉTERES EGYENLETEK

- Egyenletes mozgás ($v = \frac{s}{t}$)
 - Hőátadással járó folyamatok
$$c_1 \cdot m_1 \cdot (T_1 - T_k) = c_2 \cdot m_2 \cdot (T_k - T_2)$$
 - Egyenletesen gyorsuló mozgás ($s = v_0 t + \frac{g}{2} t^2$)
5. Mennyi idő alatt ér földet az a test, amit 60 méter magasságból 10 m/s kezdősebességgel függőlegesen lefelé hajítunk? ($g=10 \text{ m/s}^2$)

Megoldás a fenti képlettel: $60 = 10t + \frac{10}{2} t^2$???

EGYENLETRENDEZÉS, EGYENLETMEGOLDÁS, PARAMÉTERES EGYENLETEK

- Egyenletesen gyorsuló mozgás ($s = \frac{a}{2}t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$)
- Rugó rezgésideje, ingamozgás ($T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$)
- Rezgő test kitérése, sebessége, gyorsulása
($y = A \cdot \sin(2\pi ft)$; $v = A\omega \cdot \cos(2\pi ft)$)
- Bomlási folyamatok ($A = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$)

SZÁMOLÓGÉP HASZNÁLAT

EGYENLETRENDEZÉS, EGYENLETMEGOLDÁS, PARAMÉTERES EGYENLETEK

- Pontrendszerek dinamikája:

Egyenletrendszerek:

$$m_1 a = m_1 g - K$$

$$m_2 a = K - m_2 g$$

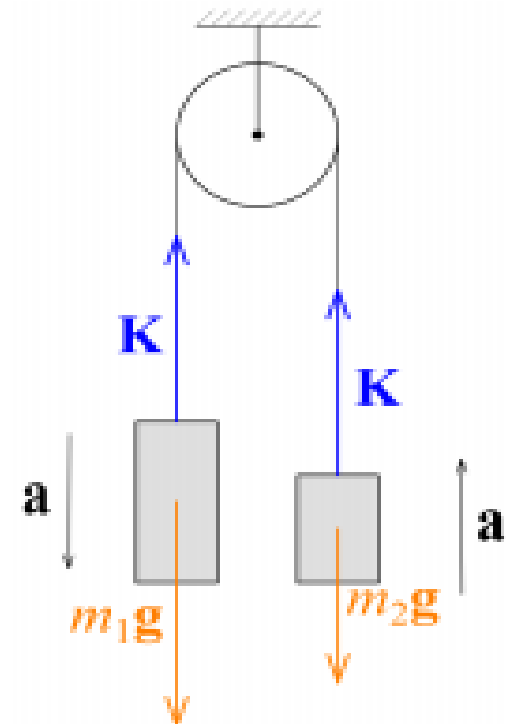
A két egyenlet összeadásával:

$$a = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

- Hőtani folyamatok vizsgálata:

Paraméter fogalma

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$$



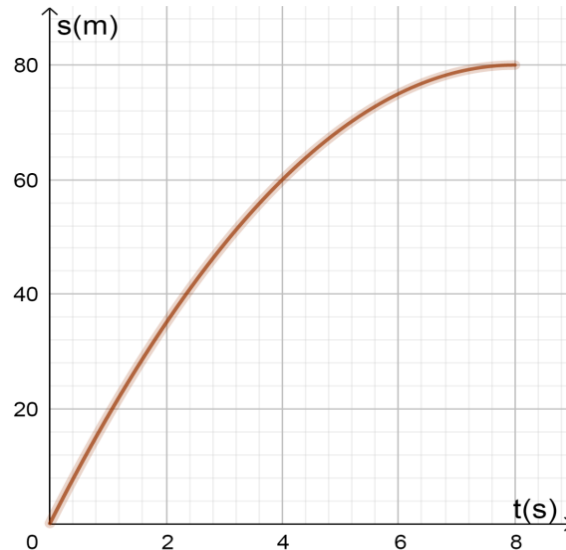
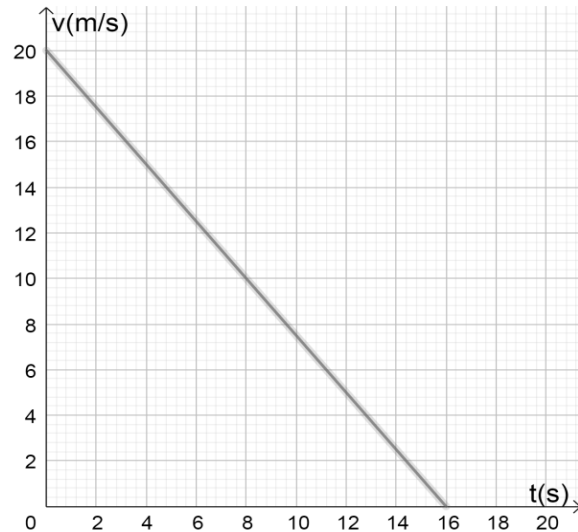
FÜGGVÉNYEK, GRAFIKONOK

- Mozgások kinematikai vizsgálata, úttörvények
 - Ideális gázok állapotváltozásai
 - Rezgőmozgás, hullámmozgás
 - Radioaktív bomlás
6. Egy gépkocsi $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességről 8 s alatt fékezett le egyenletesen változó mozgással.
- a) Mekkora a fékút?
 - b) Rajzoljuk le a mozgás sebesség-idő és út-idő grafikonját!

FÜGGVÉNYEK, GRAFIKONOK

Megoldás: $v = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ és $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{8 \text{s}} = -2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 8 \text{s} - 1,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (8 \text{s})^2 = 80 \text{ m}$$



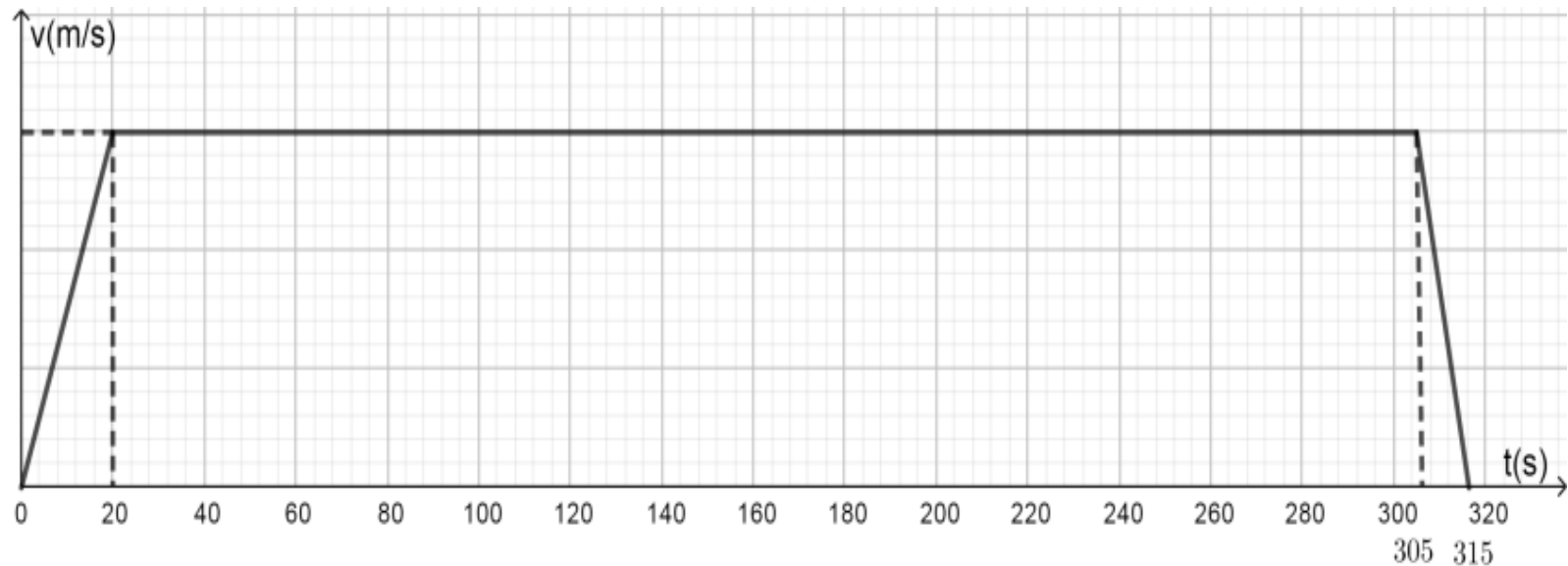
$$v = v_0 + a \cdot t = 20 - 2,5 \cdot t$$

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 = 20 \cdot t - 1,25 \cdot t^2$$

GEOMETRIAI ISMERETEK, KÖRHÖZ KAPCSOLÓDÓ ISMERETEK

- Sebesség-idő grafikon alatti terület:

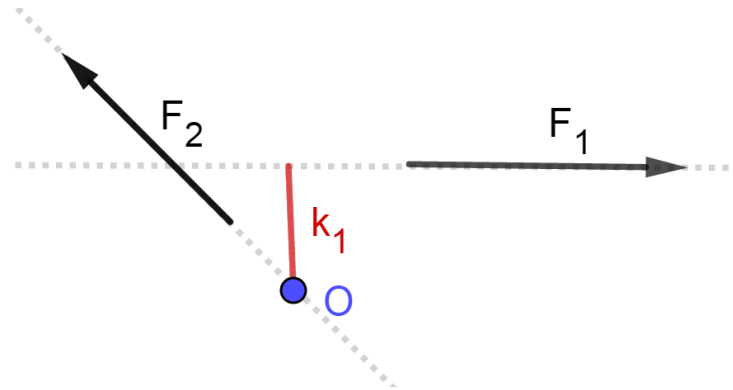
$$s = 3000 \text{ m}, \quad v_{max} = ?$$



- Munka kiszámítása (F-s v. p-V grafikon alatti terület)

GEOMETRIAI ISMERETEK, KÖRHÖZ KAPCSOLÓDÓ ISMERETEK

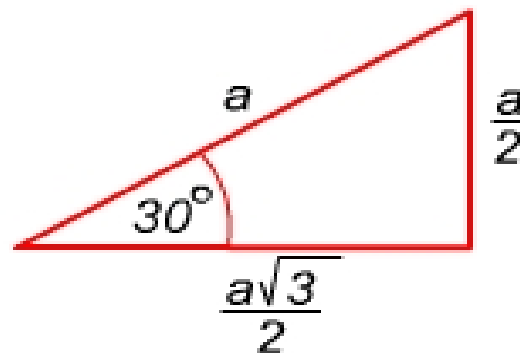
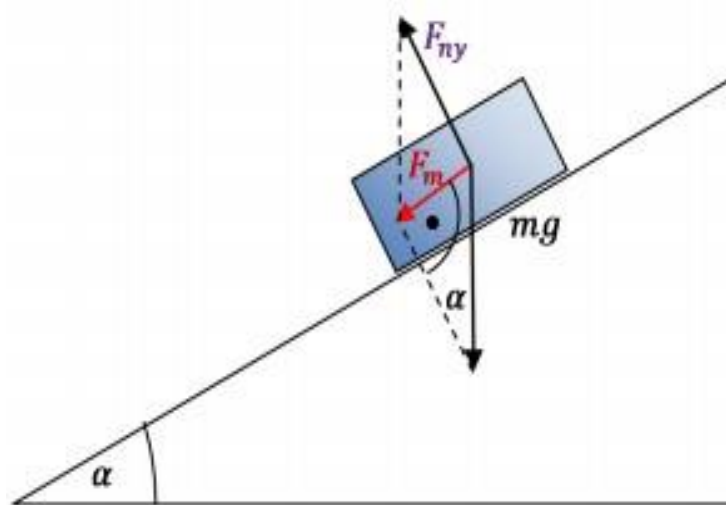
- Erőkar meghatározása: pont és egyenes távolsága



- Körmozgás, forgómozgás: kör kerülete, szögelfordulás számítása fokban, ívmértékben
- Áramlási törvény, sűrűség, ...: térfogatszámítás

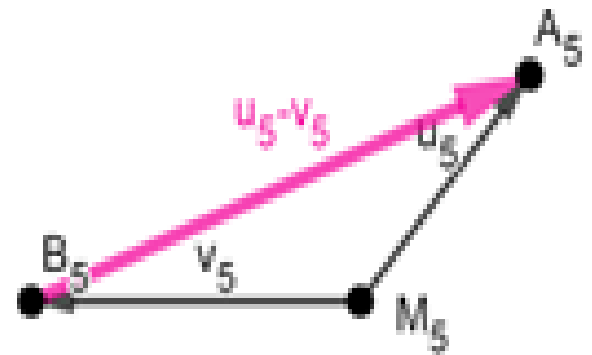
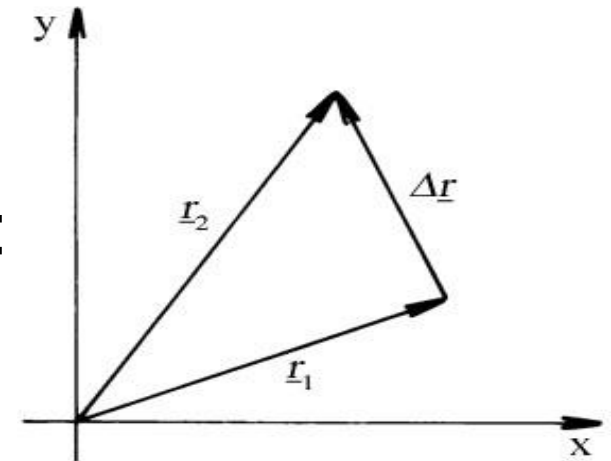
GEOMETRIAI ISMERETEK, KÖRHÖZ KAPCSOLÓDÓ ISMERETEK

- Lejtőn mozgó test: hasonlóság, merőleges szárú szögek, hegyesszögek szögfüggvényei



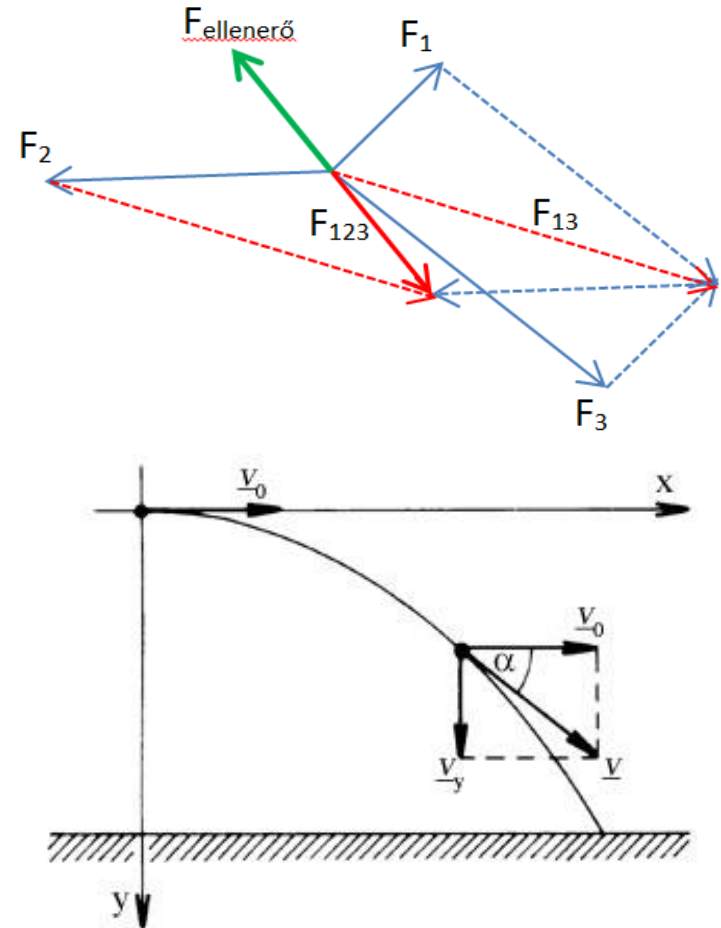
VEKTOROK, KOORDINÁTA-RENDSZEREK

- Vonatkoztatási rendszer
- Helyvektor, elmozdulásvektor:
vektorok különbsége
- Egymáshoz viszonyított
mozgások:
különbség és ellentettvektor



VEKTOROK, KOORDINÁTA-RENDSZEREK

- Eredő erő,
mozgások szuperpozíciója
- Mozgások, erők felbontása
merőleges összetevőkre



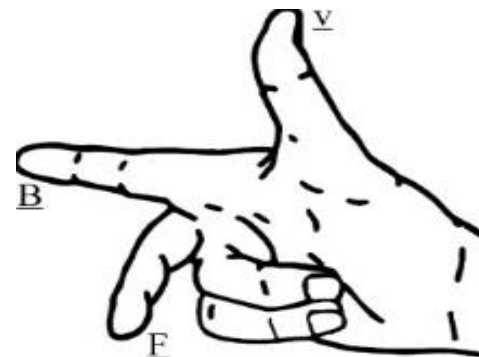
VEKTOROK, KOORDINÁTA-RENDSZEREK

- A munka fogalom kialakítása: skaláris szorzat
7. Mekkora munkát végez a 80 N nagyságú erő a testen, ha a munkavégzés során az elmozdulás 300 m és az elmozdulás
- a) az erővel megegyező irányú $\rightarrow W = F \cdot s$
 - b) merőleges az erőre $\rightarrow W = 0$
 - c) 60 fokos szöget zár be az erővel? $\rightarrow$

$$W = F \cdot s = F \cdot s \cdot \cos\gamma$$

- Lorentz-erő: vektoriális szorzat

$$\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



HOGYAN SEGÍTHETI A MATEMATIKAOKTATÁST?

- Fizikai előismeretek megalapozzák a matematikai fogalmak bevezetését (függvények, vektorok, negatív kitevőjű hatvány, trigonometria, stb.)
- Ismétlés, gyakorlás, konkrét alkalmazások estén
- Számológép használat



Kapcsolódási pontok ismeretével és
együttműködéssel
IDŐ NYERHETŐ

HOGYAN SEGÍTHETI A MATEMATIKAOKTATÁST?

- Fizikai összefüggések felismerése mellett a matematika különböző területein tanult ismeretek alkalmazása, összekapcsolása
- Jártasság gyakorlati problémák tananyaghoz kapcsolásában, szövegértés gyakorlása, szakszöveg értelmezése



KOMPLEX GONDOLKODÁS FEJLESZTÉSE

- Szakköri feladatok

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

SZÉCHENYI 



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE