

TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN:

Segédanyagok középiskolai tanárok számára

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE

Összeállította: Dobos Sándor

Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium Budapest

Időpont: 2019. november 15. péntek, 10⁰⁰ – 14³⁰ óra

Helyszín: PPKE Információs Technológiai és Bionikai Kar

1083 Budapest, Práter u. 50/a, földszint, Jedlik Ányos előadóterem

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

TEHETSÉGGONDOZÁS A MATEMATIKÁBAN:

Segédanyagok középiskolai tanárok számára

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKATANÁROK SZAKTÁRGYI TOVÁBBKÉPZÉSE, 2019

Feladatok a kombinatorikus geometriából

TARTALOMJEGYZÉK:

Bevezetés	2. oldal
I. Felező egyenesek	3. oldal
II. Almáspite avagy osszuk fel a síkot	5. oldal
III. A felosztott sík színezése	7. oldal
IV. Pontrendszerek szimmetriái	10. oldal
V. Piros és zöld pontok	12. oldal
VI. Gráfok a kulisszák mögött és a porondon	15. oldal
VII. Konstrukciók	21. oldal

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Feladatok a kombinatorikus geometriából

Bevezetés

A kombinatorikus geometria a matematikának egy olyan csodálatos területe, ahol nevének megfelelően két terület találkozik. Kombinatorikus módszerek, leszámolások, skatulya-elv, diszkrét matematikai eljárások, színezések alkalmazhatók síkbeli pontrendszerekre, alakzatokra. A sík illeszkedési szabályai, szimmetriái, a sokszögek vagy más síkidomok tulajdonságai új megközelítésbe kerülnek, ezáltal jobban, mélyebben megismerhetővé, megérthetővé válnak a problémamegoldás során. A témakör roppant gazdag.

A matematikának ez az ága az iskolai oktatásban igen kis szerepet kap. Pedig gyönyörű problémák teszik nevezetessé! Erdős Pál emlékezetes előadásain rendre előkerült egy-egy. Egyszerű, vagy annak tűnő állítások ejtik rabul az embert. Ezek megértése akár egy általános iskolásnak sem nehéz. Idézzünk fel két ilyen problémát.

Adott a síkon n pont, amelyek nincsenek mind egy egyenesen. Ekkor van olyan egyenes, amelyen pontosan két pont van közülük. (Sylvester probléma) Maga az állítás egy kisgyerek számára is megérthető, bizonyítani már nehezebb. Manapság is vannak aktív kutatók, tudós matematikusok, akik ezen probléma részleteit, további kérdéseit boncolják, vizsgálják. A problémában szereplő kétpontú egyeneseket Gallai Tibor emlékére -aki nagyszerű bizonyítást talált- Gallai egyeneseknek nevezik.

Adott a síkon öt pont, semelyik három nincs egy egyenesen. Kiválasztható közülük négy, amelyek egy konvex négyszöget alkotnak. Ezt a feladatot Klein Eszter indította el világméretű útjára. Megoldása nem nehéz. Az általánosítása viszont ma is megoldatlan probléma. Az a sejtés, hogy $2^{n-2} + 1$ általános helyzetű (semelyik három nincs egy egyenesen) pont között van n , melyek konvex n oldalú sokszöget alkotnak. Ehhez a témához kapcsolódik Erdős és Szekeres nevezetes tétele, amelyet „Happy End” problémaként emlegetnek, hiszen Klein Eszter lett Szekeres felesége.

Az alábbiakban nem fogunk szerkeszteni, de fogunk rajzokat készíteni, geometriai konstrukciókat adni. Nem fogunk távolságokat és szögeket mérni, viszont nagy figyelmet szentelünk az illeszkedési viszonyoknak. A kombinatorikával való szoros kapcsolatot mutatják a leszámolási feladatok. Lesz olyan téma, amelyben gráfokra is szükségünk lesz.

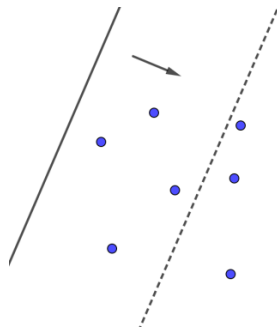
Nem törekedtünk teljességre, inkább a sokszínűsége. Reméljük ez az anyag kedvet ébreszt majd a kombinatorikus geometria iskolai feldolgozására, akár tanórán, akár szakkör keretében. Az összeállításban hét feladatszálat mutatunk be. Az első négy egészen egyszerű, könnyen megérthető problémából indul, majd megmutat lehetséges folytatásokat, elágazásokat, egyre nehezedő szinteket. Az ötödik egy kicsi kutatómunkába kalauzol. A hatodikban részletesen tárgyalunk egy tanulságos feladatot, amely remek ötvözete a gráfoknak és a geometriának, majd gráfok geometriai realizálásával foglalkozunk különböző feltételekkel. A hetedik egy színes válogatás konstrukciós feladatokból.

I. Felező egyenesek

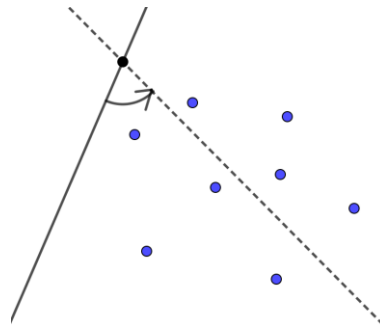
1. Adott $2n$ pont a síkon. Hogyan található olyan egyenes, amelynek mindkét oldalán n pont van?

Megoldás:

Két gondolatmenetet mutatunk be. Mindkettő kihasználja, hogy a pontpárok csak véges sok irányt határoznak meg. Az első változatban tekintsünk egy ezektől különböző irányt és egy ilyen egyenessel „söpörjük” végig a síkot (önmagával párhuzamosan toljuk). Erre egyesével kerülnek a pontok. Ha a pontok konvex burkán kívülről indulunk, akkor az egyenes egyik oldalán 0, a másik oldalán $2n$ pont van. Az egyenessel söpörve átjutunk a konvex burok másik oldalára, akkor mind a $2n$ pont egyesével átlép az egyenes egyik oldaláról a másikra, ezért lesz olyan helyzet, amikor mindkét oldalon n - n pont lesz. (1.1. ábra)



(1.1. ábra)



(1.2. ábra)

A második változatban vegyünk a pontok konvex burkán kívül egy olyan pontot, amely nincs rajta semelyik két adott pont egyenesén sem. Ezen a ponton át húzzunk egy egyenest és forgassuk a pont körül. Ezt is tekinthetjük egy fajta „söprésnek”, ezen az egyenesen is egyesével lépnek át a pontok. (1.2. ábra)

Mindkét gondolatmenetből látszik, hogy elérhető minden $k < 2n$ esetén az is, hogy az egyik oldalon k , a másik oldalon $2n - k$ pont legyen.

2. Adott n általános helyzetű pont a síkon. Ez alatt azt értjük, hogy semelyik három nincs egy egyenesen. Igazoljuk, hogy van olyan kör, amelynek belsejében pontosan k pont van. ($k \leq n$)

Megoldás:

Vegyünk egy olyan pontot, ami nincs rajta semelyik két adott pontpár szakaszfelező merőlegesén. Ha e köré rajzolunk kört, azon az adott pontok közül legfeljebb egy lehet. A kör sugarát változtatva elérhető a kívánt cél.

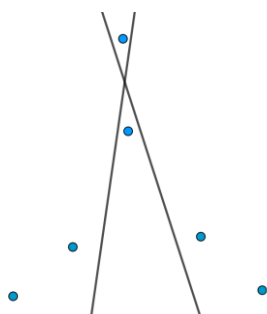
Másfajta gondolatmenetet is hallottam diákjaimtól: vegyünk egy olyan k kört, aminek a sugara sokkal-sokkal nagyobb, mint a pontrendszer konvex burka. Például ha a konvex burok letakarható egy r sugarú körrel, akkor k sugara legyen $10^6 \cdot r$. Ekkor a k kört mozgatva, k -nak a konvex burokba eső része alig görbül, lényegében egy szakasznak tekinthető és ezért az 1. feladatbeli gondolat használható rá. Ebben a gondolatmenetben erősen felhasználtuk, hogy n , azaz véges sok pontról szól a feladat. Ha ugyanis van egy megfelelő módon osztó egyenes, azt a hozzá legközelebbi pontokig tolva igazából egy vékony sávot is kaphatunk, melynek határai az egyenessel párhuzamosak. A nagyon nagy körnél viszont elérhető, hogy a sávon belül maradjon.

3. Az első feladatban kapott egyeneseket nevezzük felező egyeneseknek. Keressünk olyan hat pontból álló ponthalmazt, amit többféleképpen is el lehet felezni. Keressünk minél több felező egyenest. (Ha egy felező egyenest egy picit elmozdítjuk, de a két oldalán ugyanaz a három-három pont van, azt nem tekintjük különböző esetnek.)

Megoldás:

Ha a hat pont konvex burka egy hatszög, akkor nyilván háromféle felező egyenes húzható. A diákok általában következő lépésként egy szabályos ötszöget adnak meg a középpontjával, ez ötféleképpen elfelezhető. Az alábbi ábra olyan elrendezést mutat, amelyben hatféle felező egyenes van. A hat pont úgy helyezkedik el, mintha egy háromszög három csúcsát vennénk, majd minden pontot megismételnénk kicsit beljebb, mintha például a súlypontból kissé kicsinyítenénk a háromszöget. Ekkor a háromszög bármely csúcsához tartozik kétfajta felező egyenes az ábra szerint.

Megjegyezzük, hogy ennél több módon nem lehet felezni.

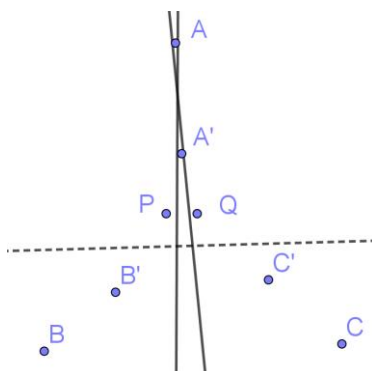


4. Mutassuk meg, hogy elhelyezhető 8 pont úgy, hogy 8-nál többféle felező egyenes legyen.

Megoldás:

Induljunk ki az előző feladatra adott megoldásból és vegyünk hozzá további két pontot, melyek elég közel vannak a kiinduló háromszög S súlypontjához. Legyenek ezek P és Q . Legyenek továbbá a kiinduló háromszög csúcsai A, B, C , a kicsinyítetté A', B', C' . Ha az AA' szakasz felezőpontján és S -en áthaladó egyenest a felezőpont körül kicsit elforgatjuk, a fenti megoldáshoz hasonló helyzetbe. Az ilyen típusú megoldások közül kettőt mutat az ábra az AA' szakasz felezőpontján át. Amennyiben PQ párhuzamos BC -vel és PQ felezőpontja S , akkor kicsi elforgatás esetén az imént bemutatott hat egyenes felezi a 8 elemű ponthalmazt, ráadásul ezek mindegyike olyan, hogy P és Q különböző oldalra esnek.

További három egyenes megadható az eredeti háromszög oldalaival párhuzamosan, ahol a két oldalon lévő ponthalmazok: $AA'BB'-CC'PQ$; $BB'CC'-AA'PQ$ és $CC'AA'-BB'PQ$. Ezek közül a középsőt az alábbi ábrán szaggatott vonal jelzi.



5. Legyen S a sík pontjainak egy véges, legalább kételemű halmaza. Feltesszük, hogy az S halmaz semelyik három pontja sincs egy egyenesen. Egy szélmalomnak nevezett folyamat során kiindulunk egy ℓ egyenesből, amely az S halmaznak pontosan egy P pontját tartalmazza. Az egyenes a P forgástengely körül az óramutató járásával megegyező irányban forog addig, amíg először nem találkozik egy másik, S halmazba tartozó ponttal. Ekkor ez a Q pont lesz az új forgástengely, és az egyenes a Q pont körül forog tovább az óramutató járásával megegyező irányban egészen addig, míg újra nem találkozik egy S halmazba tartozó ponttal. Ez a folyamat vég nélkül folytatódik. Bizonyítsuk be, hogy megválaszthatjuk a $P \in S$ pontot és a P -n átmenő ℓ egyenest úgy, hogy az S halmaz minden pontja végtelen sokszor lesz a szélmalom forgástengelye. *IMO 2011. 2. feladat*

Megoldás:

Előkészítésként két dolgot gondoljunk meg. (i) Először belátjuk, hogy a folyamatban megmarad a forgó egyenes egyik oldalán lévő pontok száma két olyan állapot közt, amikor csak egy pont van az egyenesen. Ez azért igaz, mivel a régi forgástengely a forgó egyenesnek ugyanarra az oldalára kerül, mint amelyik oldalán az új forgástengely volt. Hasonlóan igaz az állítás két olyan állapotra, amikor két pont van az egyenesen.

(ii) Másrészt teljesül, hogy minden ponton megy át olyan egyenes aminek két oldalán ugyanannyi pont van. Ehhez vegyünk egy egyenest a ponton át, és tüntessük ki az egyik oldalát. Legyen a kitüntetett oldalon k -val több pont (feltehetjük, hogy k pozitív, illetve ha 0, akkor készen vagyunk). Megforgatjuk az egyenest 180 fokkal ekkor a kitüntetett oldalon k -val kevesebb pont lesz. Mivel nincs 3 pont egy egyenesen, a két oldalon lévő pontok különbsége forgatás közben egyszerre legfeljebb 1-gyel változik. Mivel pozitívból negatívba megy, közben valamikor 0 lesz.

Most térjünk rá a feladat megoldására. Az alábbiakban belátjuk, hogy páratlan sok pont esetén tetszőleges kiindulópontból megfelelő szélmalom eredményez minden olyan ℓ egyenes, amelynek két oldalán ugyanannyi pont van. Ha a pontok száma páros, akkor egy ilyen felező egyenest tekintve, majd azt egészen kicsit elforgatva az első találkozásig, megfelelő ℓ -et kapunk.

Az egyenes iránya körbe fog forogni, közben (i) alapján a két oldalán lévő pontok számának különbsége végig 0 vagy 1. Egy teljes körbefordulás során egy tetszőleges P ponton biztosan átmegy akkor, amikor éppen olyan irányú, hogy a P -re illeszkedő ilyen irányú f egyenesnek ugyanannyi pont van mindkét oldalán. (Ilyen egyenes (ii) szerint valóban létezik.)

Tegyük fel ugyanis, hogy az e egyenesünk ilyen irányú, de nem megy át P -n - ugyanakkor tartalmazza a halmaz egy Q pontját. Az f -et nemnulla eltolás viszi e -be, melynek eredményeként eltávolodik P -től, és rákerül a Q . Így az e P -t tartalmazó oldalán legalább kettővel több pont lenne, mint a másikon, ami ellentmondás. Ezzel a feladatot megoldottuk. (Dankovics Attila diákolimpikon megoldása alapján.)

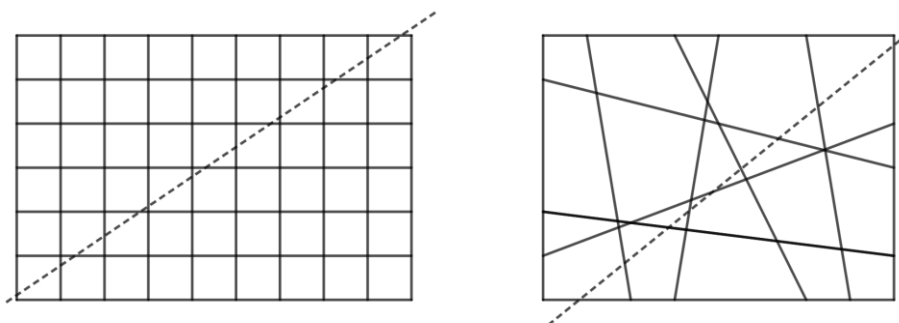
II. Almáspite, avagy osszuk fel a síkot

6. Nagymama almáspitét süt egy téglalap alakú tepsiben. Egyik irányban 5, a másik irányban 8 vágással téglalap alakú részekre vágja a süteményt. Pistike a konyhakéssel egy egyenes mentén végigvághatja az almáspitét és azokat a szeleteket, amelyekbe belevág, megeheti. Legfeljebb hány rész juthat így Pistikének?

Megoldás:

Pistike vágása a tepsi szélétől indul, legyen ez az „induló szelet”, majd mindig akkor fog új részt kettévágni, ha vágásának egyenese metszi a nagymama által vágott egyeneseket. Egyik irányban 8, a másikban 5 vágást végzett a nagy, ez 13 metszéspont, az induló szelettel együtt összesen 14 szeletet ehet meg a falánk kis Pistike. Ha a vágás a téglalap átlója mentén halad, akkor valóban elmetszi az összes osztóvonalat. Amennyiben az átló áthalad nagymama osztóvonalainak metszéspontján, akkor egy picit toljuk el önmagával párhuzamosan. Mivel az osztóvonalaknak csak véges sok metszéspontja van, ezért az átlónak van olyan kicsivel eltolt helyzete, amikor valóban létrejön mind a 13 metszéspont.

Érdekes a feladatot később újra elővenni. Ekkor nagymama vágásai ne legyenek párhuzamosak a tepsi szélével, csak az a lényeg, hogy két szemközti oldal között fussanak. Nagymama felosztásában furcsa mozaik keletkezhet, de korábbi gondolatmenetünk most is kifogástalanul működik. Ha nem az almáspitére és a szeletekre koncentrálunk, hanem ezeket a metszéspontok segítségével számoljuk, akkor könnyen áttekinthetővé válik a feladat. Az alábbi ábrák mindkét felosztást szemléltetik.



7. Legfeljebb hány részre osztja a síkot n egyenes?

Megoldás:

Az $n=1, 2, 3$ esetek még könnyen áttekinthetők. Ekkor a keletkező részek száma rendre legfeljebb 2, 4, 7. Jelölje n egyenes esetén a tartományok számát $t(n)$. Akkor kapunk a lehető legtöbb tartományt, ha az egyenesek között nincs párhuzamos és nincs olyan pont, amelyre három egyenes illeszkedne. Egy új egyenes behúzásával a keletkezett metszéspontok számánál eggyel több új rész keletkezik, azaz $t(n+1)=t(n)+n+1$. Innen kapjuk, hogy $t(n)=1+1+2+3+\dots+n$, amiből

$$t(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

8. Legfeljebb hány részre osztja a síkot 10 kör?

Megoldás:

Próbáljuk meg lemásolni az előző feladat gondolatmenetét: Az $n=1, 2$ esetek még könnyen áttekinthetők. Ekkor a keletkező részek száma rendre legfeljebb 2, 4. Jelölje n kör esetén a tartományok számának maximumát $k(n)$. Egy új kör behúzásával ugyanannyi új rész keletkezik legfeljebb, mint amennyi a keletkezett metszéspontok száma. Az $(n+1)$. kör minden korábbi legfeljebb két pontban metszhet, így $k(n+1)=k(n)+2n$. Innen kapjuk, hogy $k(n) = (n-1)n + 2$. A síkot tehát 10 kör legfeljebb 92 részre osztja.

9. Kockacukrokból építünk egy $3 \times 4 \times 5$ -ös téglatestet. Legfeljebb hány kockacukrot dőhet át egy egyenes?

Megoldás:

Ismét használhatjuk az előző három feladatban látott ötletet. Az átdőft kockákat az alapján számoljuk meg, amikor az egyenes metszi a kocka felszínét. Ha egy dőft egyenesen elindulunk a kockán kívülről, akkor minden egyes sík metszésekor belépünk egy új részbe. A téglatest határán belépéskor érkezünk az első kicsi kockába. Belül irányonként 2, 3 illetve 4 síkot tudunk metszeni. Így az új részekbe történő belépések száma legfeljebb $1+2+3+4$, azaz legfeljebb 10 kockát lehet dőfti. Ennyi kockacukrot valóban lehet, ha például a téglatest testátlója mentén halad az egyenes.

10. Legfeljebb hány részre osztja a teret 10 sík?

Megoldás:

Egy sík a teret két részre osztja, két nem párhuzamos sík pedig négy részre oszt. A továbbiakban ismét rekurzióra törekedünk. Ha meglévő síkjainkhoz hozzáveszünk egy új S síkot, akkor meglévő síkjaink metszésvonalai S -sel tartományokat alakítanak ki az új S síkon. Eddig a megoldásban két sík esetét tekintettük át. Ha a meglévő két síkunkhoz hozzáveszünk egy harmadikat, akkor azon két metszésvonalat látunk, melyek az új, harmadik síkot a 7. feladatban látottak alapján az ottani jelölést használva $t(2)$, azaz négy részre osztja. A térrészek számát most úgy határozzuk meg, hogy a meglévők mellé megszámlolunk minden olyat, aminek egyik határa az S -en kialakult tartományok egyike. Jelölje n sík esetén a részek számának maximumát $s(n)$. Az eddigiek alapján $s(1)=2$, $s(2)=4$ és $s(3)=4+t(2)=4+4$. Ennek megfelelően a rekurzív képletünk $s(n+1)=s(n)+t(n)$. Ebből levezethető, hogy $s(10)=176$ és általánosan megmutatható:

$$s(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} + n + 1 = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}.$$

Alaposabban megfigyelve észrevehetjük, hogy a 7. feladat eredményét is írhatjuk ilyen alakban,

$$t(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}.$$

Sőt! Visszalépve egy dimenziót: egy egyenest n pont $n+1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ részre oszt. Ez a szép észrevétel segíthet n -dimenziós általánosításhoz. E helyett próbáljuk meg jobban megérteni az eddigi $t(n)$ függvényt.

Megadunk egy olyan gondolatmenetet, ami más oldalról közelíti meg $t(n)$ értékét. Képzeljük el, hogy a síkunkon ott van az n egyenes. Húzzunk be most gondolatban egy olyan e egyenest, amely nem párhuzamos egyik korábbival sem, és az n egyenes metszéspontjainak konvex burkán kívül halad. A szemléletesség kedvéért legyen az e egyenes vízszintes, minden metszéspont pedig felette van. Ekkor az n pont által meghatározott síkrészek között vannak olyanok, amik alulról korlátosak, ezek legalsó pontja két egyenes metszéspontja, ilyenből pedig $\binom{n}{2}$ van. Az alulról nem korlátos részek annyian vannak, ahány részre az n egyenes e -t osztja, ez pedig $n+1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$. Hasonló módon kaphatjuk $s(n)$ képletét is.

III. A felosztott sík színezése

11. Rajzoljunk a síkra n egyenest. A kapott síkrészeket színezzük ki 2 színnel úgy, hogy két síkrészt különböző színűre festünk, ha határosak, azaz van közös határoló szakaszuk, vagy félegyenesük. (Ha határaik közös része egyetlen pont, akkor nincs elvárás, milyen színűek legyenek.) Bizonyítsuk be, hogy ilyen színezés mindig elvégezhető!

Megoldás:

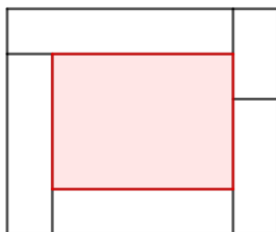
Indukcióval bizonyíthatunk 0, illetve 1 egyenes esetén az állítás igaz, így az indukció kezdő lépésével rendben vagyunk. Ha n egyenesre igaz az állítás és elhelyezünk egy újat, akkor az két részre, két félsíkra osztja a síkot. Tekintsük azt a színezést, amit az indukciós feltevés alapján n egyenes esetén készíthettünk. Az új egyenes által határolt egyik félsíkban tartsuk meg ezt a színezést, a másik félsíkban pedig minden tartomány váltson színt.

12. Rajzoljunk a síkra n kört. A kapott síkrészeket színezzük ki 2 színnel úgy, hogy két síkrészt különböző színűre festünk, ha van közös határvük. (közös határpont esetén nem.) Bizonyítsuk be, hogy ilyen színezés mindig elvégezhető!

Megoldás:

Ez a feladat egyenesekkel közismert, de megoldása körökkel is ugyanúgy működik. Indukcióval bizonyíthatunk. 0, illetve 1 kör esetén az állítás igaz. Ha n körre igaz az állítás és elhelyezünk egy új kört, akkor annak belsejében minden tartománynak változtassuk meg a színét.

Ha már megoldottuk egyenesekkel és körökkel a feladatot, adjuk fel téglalapokkal is! Az az igazság, hogy ekkor nem végezhető el minden esetben a színezés. Az alábbi ábrán szereplő téglalapok színezéséhez 3 szín sem elég! A közepén levő téglalapot 5 másik veszi körül. Ha a középső mondjuk piros, akkor a körülötte levőkhöz pirosat már nem használhatunk. Színezzük két színnel felváltva a középső körül levő téglalapokat. El fogunk akadni, hiszen az 5 páratlan, és így azonos színű téglalapok találkoznak, amint körbeérünk.



13. Adott a síkon 10 általános helyzetű egyenes. (Ez alatt azt értjük, hogy nincs köztük párhuzamos és minden metszéspontban pontosan két egyenes találkozik.) Képzeljük el ezeket, mint egy úthálózatot és a kereszteződésekben mindenhol az egyikre aluljárót, a másikra felüljárót építünk. Meg lehet-e ezt tenni úgy, hogy minden egyenes mentén felváltva legyenek az alul- illetve felüljárók?

Megoldás:

Igen, meg lehet így építeni az úthálózatot. Használjuk a 11. feadat eredményét és színezzük ki a síkot két színnel. Haladjunk végig az egyik úton és figyeljük jobb oldalon a színt. Ha egy kereszteződésnél feketéről fehérre vált a jobb oldalon levő rész színe, akkor építsünk felüljárót, a másik esetben pedig aluljárót. Ez az egyszerű eljárás könnyen ellenőrizhető. Ugyanazon az egyenesen bármely irányból érkezünk ugyanolyan típusú kereszteződést definiál az eljárás. A kereszteződésbe futó másik egyenes

pedig éppen az ellenkező típust adja. Mivel a színezés mindig megtehető, ezért az úthálózat is ennek megfelelően megtervezhető.

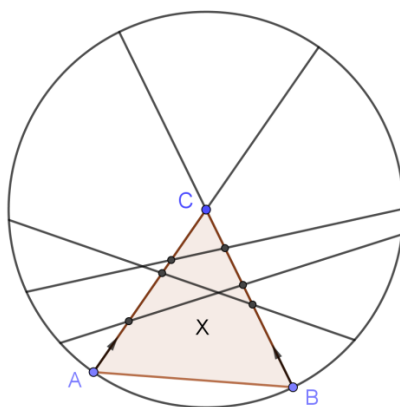
14. Adott a síkon $n \geq 2$ szakasz úgy, hogy bármely két szakasz keresztezi egymást, és semelyik három szakasznak sincsen közös pontja. Jeromosnak ki kell választania mindegyik szakasznak az egyik végpontját, és oda egy-egy békát elhelyezni úgy, hogy a béka a szakasz másik végpontja felé nézzen. Ezután Jeromos $(n-1)$ -szer fog tapsolni. Mindegyik tapsolásra minden béka azonnal a szakaszon található következő metszéspontra ugrik. A békák az ugrásirányukat soha nem változtatják meg. Jeromos úgy szeretné elhelyezni a békákat, hogy soha ne legyen két béka azonos időben azonos metszésponton. (a) Bizonyítsuk be, hogy Jeromos ezt mindig meg tudja tenni, ha n páratlan. (b) Bizonyítsuk be, hogy Jeromos ezt soha nem tudja megtenni, ha n páros. *IMO 2016. 6. feladat*

Megoldás:

Az (a) részre mutatunk egy olyan megoldást, ami az előző feladatokra épül. Ha n páratlan, akkor a szakaszok metszéspontjaihoz rendeljük az előző feladatnak megfelelően alul- és felüljárókat. Mivel a szakaszok száma páratlan, ezért minden szakasz mentén páros sok metszéspont van, ezeken felváltva az alul- és felüljárók, ezért a szakasz egyik végéhez legközelebb aluljáró van, a másik végéhez legközelebb pedig felüljáró. Ültessünk minden békát a felüljáróhoz közelebbi végpontba. Minden tapsoláskor minden béka ugyanolyan típusú átjáróhoz érkezik, így nem találkozhatnak metszéspontnál.

A (b) rész Gáspár Attila diákolimpikon megoldása alapján a következő. Rajzoljunk egy olyan nagy kört, ami az összes szakaszt tartalmazza a belsejében. Hosszabbítsuk meg az összes szakaszt úgy, hogy a végpontjaik a körre kerüljenek. Két szakasz legfeljebb egy pontban metszheti egymást, ezért nem jön létre új metszéspont, tehát a hosszabbítás semmit nem befolyásol. Nevezzük a szakaszvégpontokat belépési és kilépési pontoknak attól függően, hogy indul-e belőle béka, vagy nem. Nyilvánvaló, hogy n db belépési és n db kilépési pont van.

Tegyük fel, hogy a körön van két szomszédos belépési pont A és B a belőlük induló szakaszok metszéspontja C . Jelölje az ABC háromszöget az ábra szerint X . Látható, hogy mindegyik szakasz (az X -et határoló szakaszokat kivéve) 0 vagy 2 pontban metszi az X határvonalát, mert az X konvex. Az AB -t egyik sem metszi, mivel ezek szomszédos belépési pontok. Ezért mindegyik az AC és BC szakaszt fogja metszeni. A két X -et határoló szakaszon így ugyanannyi metszéspont lesz, ez legyen y (ábránkon $y=3$). Mivel $y \leq n-2$, ezért $y+1$ ugrás után a két béka összeütközik. Ez ellentmondás, tehát nem lehet két szomszédos belépési pont.



Ha a békák $n-1$ helyett n -szer ugranak, akkor a kilépési pontokba érkeznek. Ilyenkor nem történhet ütközés, ezért ez nem módosítja a feladatot. Nyilvánvaló, hogy ha a békák nem ütköztek, akkor a kilépési pontokból indulva sem ütköznenek, ekkor a lépéssorozat visszafelé játszódna le. Ebből

következik, hogy nem lehet két szomszédos kilépési pont. Így a körön lévő pontok felváltva kilépési és belépési pontok.

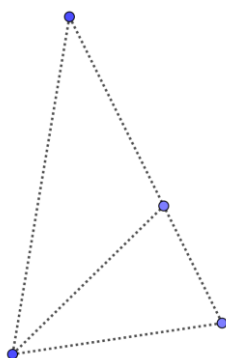
Most vizsgáljuk meg, mi a helyzet ha a szakaszok száma páros. Tegyük fel, Jeromosnak sikerült elhelyezni a békákat. Egy szakasz egyik oldalán $n-1$ végpont van. Ez páratlan, ezért a szakasz két végpontja ugyanolyan típusú, ami ellentmondás.

IV. Pontrendszerek szimmetriái

15. Van-e olyan véges ponthalmaz, amelynek tetszőleges pontját elhagyva, a maradék rész tengelyesen szimmetrikus, de az egész ponthalmaz nem tengelyesen szimmetrikus?

Megoldás:

Van ilyen ponthalmaz. Egy egyenlő szárú háromszög csúcsai, melynek szögei $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$, továbbá az egyik alapon fekvő szög szögfelezőjének talppontja.



16. Van-e olyan ponthalmaz, aminek végtelen sok szimmetriatengelye van, de középpontosan nem szimmetrikus?

Megoldás:

Sokféle módon megadhatunk ilyen ponthalmazt. Ezek közül lássunk hármat: (i) félsík; (ii) három párhuzamos úgy, hogy a középső nem félúton van, például az $x=1$, $x=2$ és $x=4$ egyenesek; (iii) A számegyenes minden egész helyére ráállítunk egy ugyanakkora tengelyesen szimmetrikus T betűt. (...TTTT...)

A feladat jóval nehezebb változata, ha olyan alakzatra vadászunk, ami az említett feltételek mellett még korlátos is. Egy 1 sugarú körre rátekerjük a számegyenest és tekintjük az egészek által kialakított ponthalmazt. Minden pont forgásszöge k radián, ahol k egész. Különböző k és l számokhoz különböző pontok tartoznak, hiszen $k-l$ racionális, tehát nem lehet a kör kerületének, azaz 2π -nek egész számú többsége (csak, ha $k=l$). A középponton áthaladó $n/2$ radián forgásszögű tengelyek mind szimmetriatengelyek lesznek, ahol n tetszőleges egész szám.

17. Van-e olyan ponthalmaz, ami végtelen sok pontra középpontosan szimmetrikus, de nincs szimmetriatengelye?

Megoldás:

Sokféle módon megadhatunk ilyen ponthalmazt. Az előző feladat mintájára a számegyenes minden egész pontja fölé tegyünk egybevágó centrálszimmetrikus, de nem tengelyesen szimmetrikus betűk közül valamelyiket. Lehet például S, N, Z valamelyike:NNNN.... Más jó példa: egy nem téglalapokból álló paralelogramma rács.

18. Van-e olyan ponthalmaz, aminek végtelen sok szimmetriatengelye van, végtelen sok pontra középpontosan szimmetrikus, de ezek egyike sincs rajta valamely tengelyen?

Megoldás:

Nehezebbnek tűnik a feladat, de ismerős ábra vár ránk a jó megoldások között, például a szinusz függvény grafikonja ilyen. Készíthetünk más jelekből is mindkét irányban végtelen sormintát, például $\wedge\wedge\wedge\wedge\wedge$

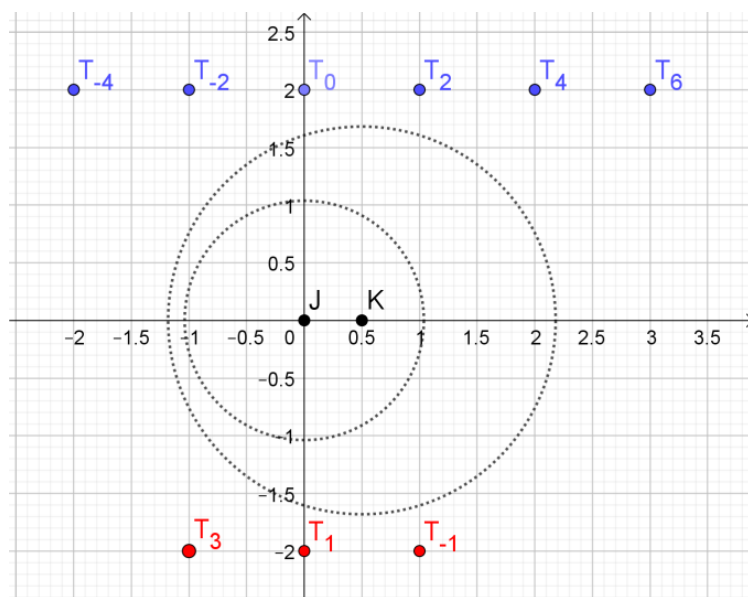
19. A sík minden rácspontját kifestjük pirosra vagy kékre. Bizonyítsuk be, hogy van a rácspontoknak végtelen, egyszínű, centrálszimmetrikus részhalmaza. *2011 Surányi emléktverseny 1. feladat*

Megoldás:

Tegyük fel, hogy bármely P pontra nézve az egyszínű centrálszimmetrikus részhalmaz csak véges. Ebből következik, hogy minden P -hez létezik egy pozitív $r(P)$ érték úgy, hogy P körül egy $r(P)$ sugarú kört tekintve, minden azon kívül elhelyezkedő pontot P -re tükrözve egy ellentétes színű pontba jutunk.

A kiszínezett síkot helyezzük a koordináta-rendszerbe és tekintsünk két centrumot, a J -vel jelölt origót és a K -val jelölt $(0.5;0)$ pontot. Legyen y olyan pozitív egész, amire $y > r(J+1)$ és $y > r(K+1)$. Ekkor jelöljük T_0 -val az $(0;y)$ pontot, ezt tükrözve J -re kapjuk a tőle különböző színű T_1 pontot, majd ezt tükrözve K -ra kapjuk a T_1 -től különböző színű T_2 pontot. Ezek szerint T_0 és T_2 azonos színűek. A két tükrözés szorzata egy $2\overline{JK}$ -val való eltolás.

Az eljárásunkat megismételhetjük, azaz T_0 -t akárhányszor eltolhatjuk jobbra egységnyi vektorral és így minden újabb pont T_0 -lal azonos színű lesz. Amennyiben T_0 -ból indulva először K -ra, majd J -re tükrözünk, akkor T_0 -t balra tolva kapjuk a T_{-2} , T_{-4} , stb pontokat, melyek szintén mind T_0 -val azonos színűek.



Azt kaptuk, hogy $\dots T_{-4}, T_{-2}, T_0, T_2, T_4, \dots$, azaz az összes $(n;y)$ koordinátájú pont azonos színű. Ez a pontrendszer viszont centrálszimmetrikus minden $(n/2;y)$ koordinátájú pontra (n egész szám).

V. Piros és zöld pontok

Ebben a részben kiindulunk egy alapfeladatból és azt próbáljuk boncolgatni, minél tovább vinni. Közben lesznek olyan részfeladatok, amelyeket csak említünk, lesznek olyanok is, amelyekhez megoldást is adunk. A gyerekek maguk kérdezhetnek, tanári irányítással, némi kis útmutatással komolyan előre is juthatnak. Ez olyan, mint egy miniatűr kutatás, így éltem át szakkörön, majd később matematika táborban. Lássuk, hogy is történt mindez, mi volt az említett alapfeladat, amit annak idején Reiman Istvántól hallottam?

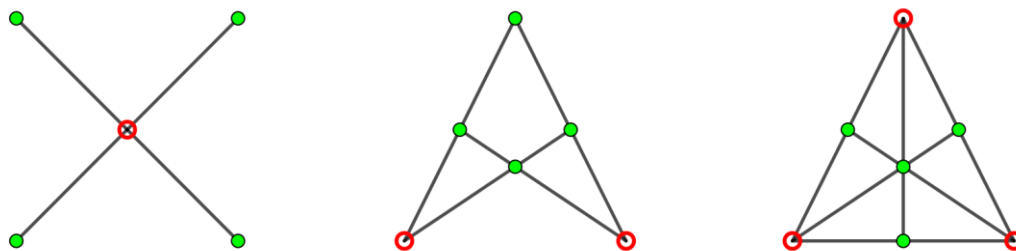
20. Adjunk meg néhány piros és néhány zöld pontot a síkon úgy, hogy ne legyen olyan egyenes, melyen csak egy piros és egy zöld pont van.

Megoldás:

Ez azt jelenti, hogy úgy kell elhelyeznünk a pontokat, hogy ha egy egyenest fektetünk egy piros és egy zöld ponton át, akkor azon minden esetben van még legalább egy az adott pontok közül. Egyszerű! Legyenek a pontok mind egy egyenes mentén és legyen 2-nél több pont –mondták azonnal a gyerekek. Egészítsük ki feladatunkat a következő feltétellel:

A pontok nincsenek mind egy egyenesen.

A szakkörös diákok hozzáláttak a rajzolgatáshoz és hamarosan megszülettek az első ábrák. Példáinkban a színek aránya 1:4, 2:4, 3:4, a piros pontot üres kicsi karika, a zöld pontot pedig teli szemlélteti.



Azonnal felvetődik a kérdés: *Rajzoljunk 2:5, 4:4, 3:5 eloszlású eseteket!*

A szakkörön az önálló próbálgatások, rajzolgatások után elkezdtek gyűjteni a különböző példákat. Kisvártatva betelt a tábla, így felmerült, rendet kellene teremteni. Legyen a piros pontok száma p , a zöldeké z . Mivel minden ábra átfesthető úgy, hogy minden pont másik színre vált, ezért feltehető, hogy $p \leq z$. Vizsgáljuk p szerint növekvő rendben a lehetőségeket.

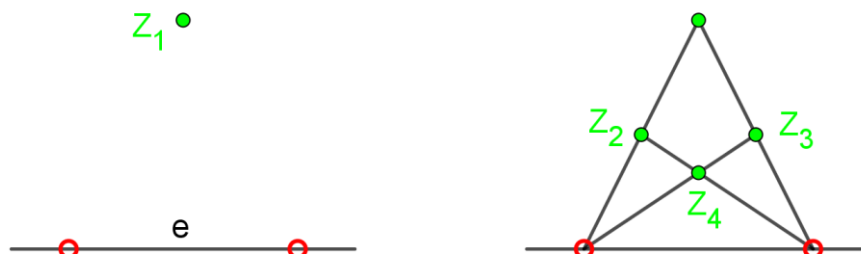
A $p=1, z=1$ párhoz nincs megfelelő elrendezés. Ezt rövidítve így fogjuk jelölni a szakkörösök javaslata nyomán: 1:1 NME. Tovább lépve megállapíthatjuk, hogy 1:2 NME szintén, hiszen 1 piros és két zöld pont csak úgy adna jó elrendezést, ha mind egy egyenesen lennének, azt viszont most nem engedjük meg. A következő három lépést feladatként is kitűzhetjük:

Bizonyítsuk be, hogy 1:3 NME.

Igazoljuk, hogy ha z legalább 4, akkor az 1: z párhoz létezik megfelelő elrendezés, azaz 1: z LME. Hogy tudnánk jellemezni ezeket?

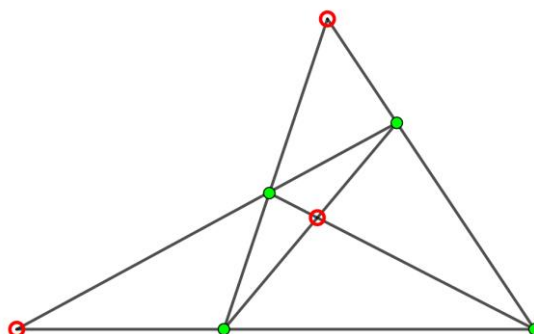
Mutassuk meg, hogy 2:2 NME továbbá 2:3 NME.

Most kicsit visszatérünk a fenti ábrákhoz, megmutatjuk, hogy a középső 2:4 pár lényegében az egyetlen megfelelő elrendezést mutatja. Tekintsük ugyanis a két piros pont e egyenesét. Mivel a pontok nincsenek mind egy egyenesen van olyan zöld pont, Z_1 , amely nincs rajta e -n. Kössük össze ezt a pontot a két piros ponttal. Ezen egyenesek mindegyikén kell lennie további zöld pontnak, Z_2 és Z_3 . Most már azonnal adódik a negyedik zöld pont, Z_4 egyetlen lehetséges helye.



Diákjaim észrevették, hogy ez, sokféleképpen lerajzolható. Mégis „lényegében” ezek mind ugyanolyanok. De miért is mondhatjuk ezt?

Nézzük meg ábráinkat a zöld pontok szemszögéből! Nyugodtan tehetünk piros pontot olyan egyenesre, amelyen legalább két zöld pont van. A 4 zöld pontot osszuk két párra. A párok meghatározta egyenesek metszéspontjaira kerülhetnek a piros pontok. Az ilyen pontokat a 4 zöld pont átlós pontjainak nevezhetjük. Egy általános négyszögnek 3 átlós pontja van, közben tehát ölnünkbe pottyant, hogy 3:4 LME. Ezt szemlélteti az alábbi ábra. Az átlós pontokat karika jelzi.



Mutassuk meg, hogy ha z legalább 4, akkor 2: z LME.

Igazoljuk, hogy 3:3 NME.

Bizonyítsuk be, hogy ha z legalább 4, akkor 3: z LME.

Talán ennyi apró lépéssel sikerült elindítani a kutatómunkát. Általában a diákok ritkán találkoznak a matematikában ilyen helyzettel. Egyetlen feladattal indultunk, de általános megoldása reménytelennek tűnt. Ezért lebontottuk a feladatot és egyszerű eseteit kezdtük el vizsgálni. Mint láthatjuk, még csak a munka kezdetén vagyunk. Azokat az eseteket térképeztük fel, amikor p legfeljebb 3. Most következnek a nehezebb feladatok, a 4:4 és a 4:5 eset. Található ilyen elrendezés, vagy nem?

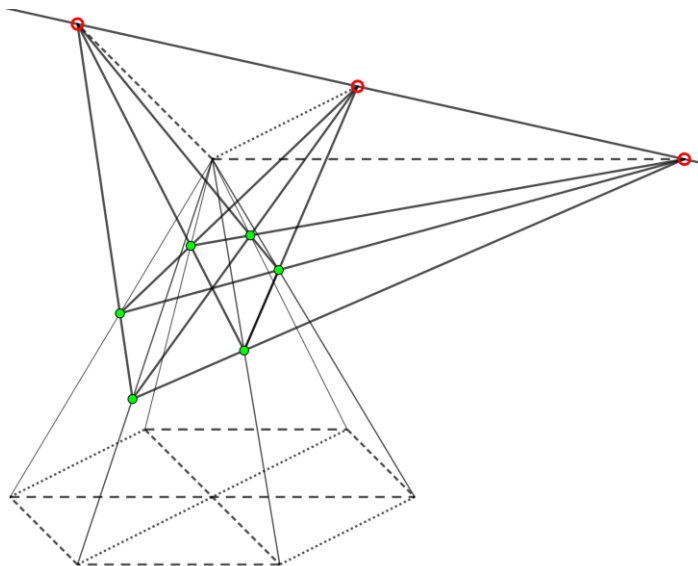
Az igazi kutatómunkához bizony hozzátartozik az eredmények rendszerezése, a nyitva maradt kérdések számon tartása is. Azért szeretem ezt a problémát, mert a diákokat ösztönzi ezeken a területeken is. Akár szentelhetünk az osztály faliújságján is egy rovatot a témának, ahol mindenki közölheti új eredményeit.

Nem árt, ha a diákok már az iskolában találkoznak olyan helyzetekkel, ahol ők maguk fogalmazhatnak meg kérdéseket és nem csupán a nekik feltett kérdésekre kell válaszolniuk. Nagy örömmre a feladat kapcsán maguk a szakkörösök jöttek elő új folytatási lehetőségekkel. Egyikőjük a következőt javasolta. Próbáljunk meg olyan általános konstrukciót keresni, ami különböző p értékeknél egyaránt jó.

Megmutatjuk, hogy ha n legalább 2, és k legalább $2n$, akkor $n:k$ LME. Vigyázat, ez az állítás egyszerűnek tűnik, de megoldása már jóval nehezebb! A megoldást megértheti egy kisdíák is, viszont egy középiskolást, vagy egyetemistát is próbára tehet a kitalálása. Mint a perspektíva tanából ismeretes, ha egy síkra párhuzamos egyeneseket rajzolunk, majd ezeket egy pontból levetítjük egy síkra, mely az eredetivel nem volt párhuzamos, akkor a párhuzamosok egy ponton áthaladó egyenesekké válnak. Meglepődve tapasztaltam, hogy ezt a tényt a gyerekek már tudják a rajzóráról. Ott készítenek perspektív ábrákat, ahol a párhuzamosok mind a horizont vonalán találkoznak. (Későbbi tanulmányaink alapján azt mondhatjuk, hogy az eredeti sík párhuzamos egyeneseinek közös pontjai az ideális egyenesen vannak, a vetítés során az ideális egyenes képe lesz a perspektív ábrán a horizont vonala.)

Következzen ennyi bevezető után a beígért konstrukció! Tekintsünk egy szabályos $2n$ szöget, legyenek ennek csúcsai zöldek. A sokszög oldalai és átlói n irányt határoznak meg. Vetítsük az említett módon sokszögünket és minden iránynak megfelelő pont a horizont vonalon legyen piros. Így egy megfelelő elrendezést kaptunk az $n:2n$ pároshoz. A piros pontok egyenesére tetszőleges számú további zöld pontot tehetünk.

Ábránkon $n=6$ esetén ábrázoltuk a konstrukciót. Egy szabályos hatszög alapú gúlát metsz egy S sík, amely az alappal nem párhuzamos. A horizont vonala az S síknak a metszete a gúla csúcsán átmenő, az alappal párhuzamos síkkal. A szabályos hatszöget a gúla csúcsából vetítjük S -re.



Van még valami, amit átélhettek a szakkörösök ennek a kutatómunkának a során. Úgy intettünk búcsút a problémának, hogy nem sikerült minden szálát elvarrni, maradtak megoldatlan kérdések. Ilyen például az a sejtés, hogy ha n legalább 4, akkor $4:n$ LME.

A tanulók egyike más irányba mutató megjegyzést tett: Jó lenne, ha sikerülne néhány pontot elhelyezni úgy, hogy egyáltalán ne legyen olyan egyenes, melyen csak 2 pont van. Ezek után bárhogy színezhethetnénk a pontokat; minden egyenesen legalább három pont van és két szín lévén, ezek közül legalább kettő egyforma színű. A figyelmes olvasó észreveheti, hogy a bevezetőben éppen ezzel a feladattal kezdtünk. Ez az úgynevezett Sylvester probléma, több mint 100 éves. Sok szép megoldást

adtak már rá. Mindegyik azt mutatja meg, hogy ilyen konstrukció nincs azon kívül, ha a pontok mind egy egyenesen vannak.

Zárjuk most ezt a részt egy rokon, de máig megoldatlan problémával. Ezt egy japán matematikus, Komei Fukuda vetette fel:

Adott egy egyenes, egyik oldalán n piros, a másik oldalon n zöld pont. Igaz-e, hogy ha nincsenek mind egy egyenesen, akkor létezik olyan egyenes, amelyen 1 piros és 1 zöld pont van?

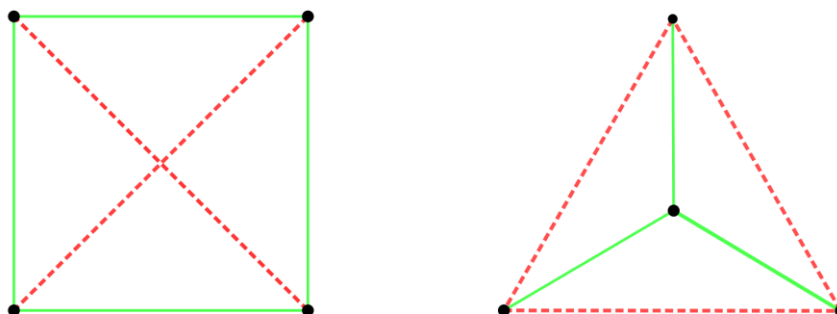
VI. Gráfok a kulisszák mögött és a porondon

Ebben a fejezetben szeretnék olyan feladatokat ismertetni, amelyek szépen ötvözik a geometriát és a gráfelméletet. A gráfok alkalmazása az indító feladatban rejtett, de ha felhívjuk rá a diákok figyelmét, megértik, milyen hasznos. Ez a feladat nagyon tanulságos, ezért részletesebben tárgyaljuk.

21. Helyezzünk el 4 pontot a síkban úgy, hogy a köztük fellépő távolságok csak kétféleké lehessenek.

Megoldás:

Tapasztalatom szerint, ezt a feladatot már hatodikosoknak is bátran feladhatjuk. Viszont középiskolásokat is próbára tehetjük vele, ha elvárjuk, keressék meg az összes megoldást. A feladat ismertetését követően kisvártatva jelentkeznek a diákok. Általában a leghamarabb megtalált konstrukciók a következők, a négyzet és a szabályos háromszög a középpontjával:



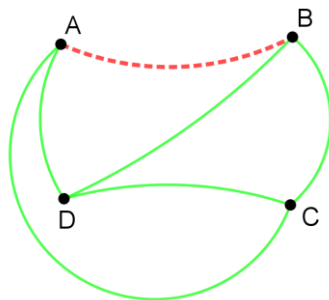
Miután megdicsértem a remek rajzokat, jöhet a kérdés. Van-e még további megoldás? Ha igen, hány megoldás van? A diákok keresgélnek, ha valaki talál újabbat, akkor ezt hangosan kihirdetem, a nélkül, hogy felrajzolnánk a táblára. Ezzel is biztathatók a diákok a további próbálkozásokra. Nagyon ritka, hogy valaki kapásból megtalálja mindegyik megoldást. Mi ennél többre vágyunk. Szeretnénk megtalálni az összes megoldást és bizonyítani, hogy nincs más.

Gondoljuk meg először azt, hogy helyezkedhet el a kétfajta vonaltípus. A pontok közül bármely kettő közt vizsgálunk kell a távolságot. Ez tehát olyan, mintha a következő gráfelméleti kérdést tennénk fel először:

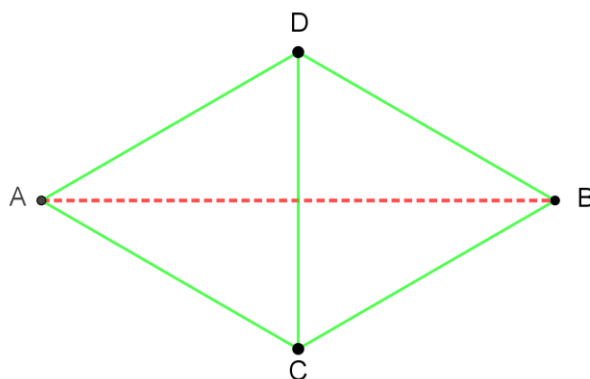
Egy négypontú teljes gráf éleit hányféleképpen színezzhetjük ki két színnel. Most csak az egymással nem izomorf megoldások érdekesek számunkra, a gráf csúcsait nem különböztetjük meg. Legyen a két szín piros és zöld. Mivel szerepük felcserélhető, ezért feltehetjük, hogy a piros élek száma nem több a zöld élek számánál. Mivel a 4 pontú teljes gráfnak 6 éle van, ezért a piros élek száma lehet 0, 1, 2, 3. Szépen sorba vesszük ezeket az eseteket.

(i) Minden él zöld. Ekkor egyetlen fajta távolság lehet, jelölje ezt t . Legyenek a pontok A, B, C, D . Ekkor B, C, D mind egy A középpontú t sugarú gömbön helyezkednek el. Ugyanez igaz a többi pontra is. Ezek szerint ABC egy t oldalú szabályos háromszög, D pedig nem lehet ebben a síkban. $ABCD$ egy szabályos tetraéder. A síkban nincs megoldás, a térben van, de ott is csak egy, mégpedig a szabályos tetraéder.

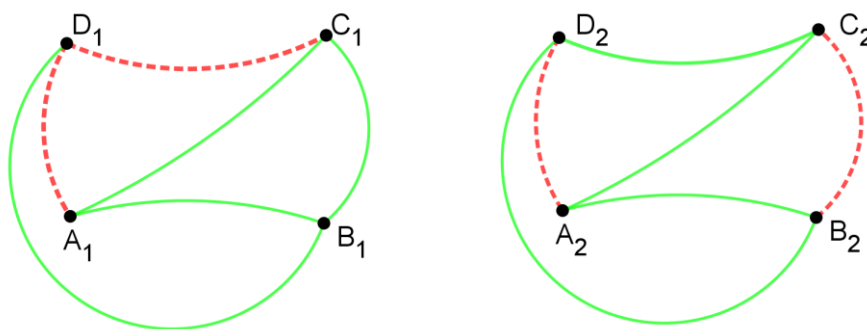
(ii) A zöld élek száma 5 és egyetlen piros él van. Ez a gráf egyféleképpen nézhet ki, legyen a piros él két végpontja A és B .



Szándékosan rajzoltam a gráfba görbe vonalakat. Itt a színek fejezik ki a megfelelő kapcsolatot, a hozzá tartozó geometriai ábra majd most jön. Nézzük meg, miről is beszél nekünk ez az ábra! BCD és ACD egy-egy szabályos háromszög, hiszen köztük ugyanolyan színű él fut, tehát a köztük levő t távolság ugyanakkora. Kicsit másként mondva: a C és D középpontú t sugarú körök egyik metszéspontja B , a másik metszéspontja A . Megkaptuk a 3. megoldásunkat, ez egy rombusz, melyet rövidebb átlója két szabályos háromszögre vág.

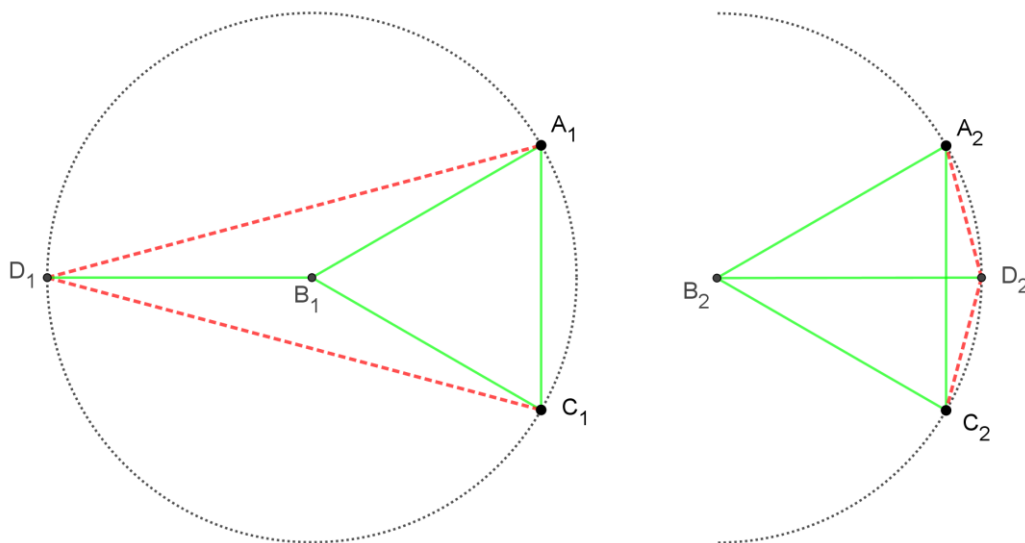


(iii) A zöld élek száma 4, két piros él van. A gráf kétféle lehet, a két piros élnek vagy van közös végpontja, vagy nincs.



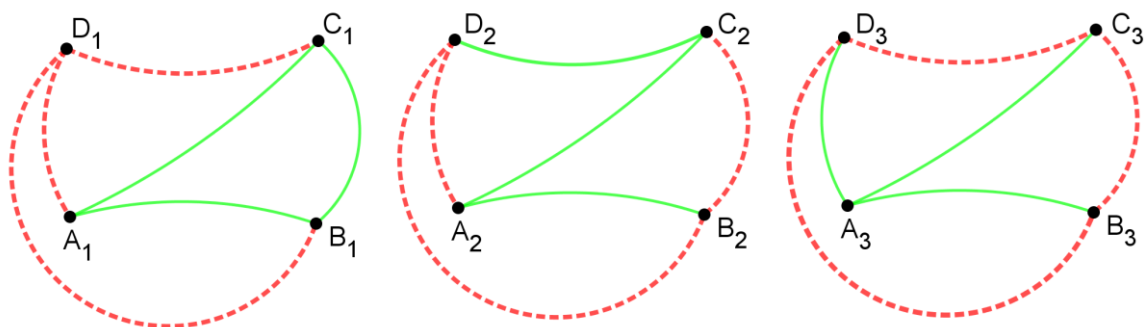
Tekintsük először azt az esetet, amikor a két piros élnek van közös végpontja, legyen ez a pont D . Ekkor ABC egy t oldalú szabályos háromszög. D rajta van a B középpontú t sugarú körön továbbá

AC felezőmerőlegesén is, hiszen AD és DC ugyanolyan színűek a gráfban, tehát AD és DC ugyanolyan hosszúak a geometriai elrendezésben. Ezzel már egyértelműen meghatároztuk, hogy is nézhet ki ez az ábra, a felezőmerőleges két helyen metszi a kört, megkaptuk a 4. és 5. megoldást:



A másik eset könnyen áttekinthető. Az $ABDC$ kör a gráfban 4 azonos színű élt tartalmaz, és a másik két él a piros. Tehát $ABDC$ egy olyan rombusz, amelynek két átlója ugyanolyan hosszú. Ez nem más mint a négyzet. Ezt az esetet találtuk meg rögtön az elején.

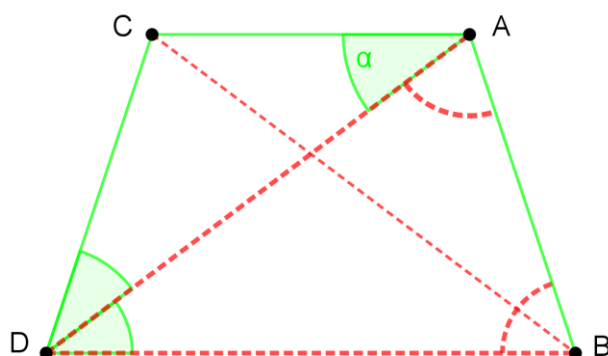
(iv) Az utolsó esethez érkeztünk el. Legyen a zöld és piros élek száma egyaránt 3. A három piros élnek összesen hat végpontja van. Mivel csak négy csúcs van, lesz tehát olyan csúcs, amelyből legalább két piros él indul. Legyen ez A , a belőle induló két piros él végpontjai B és C . A harmadik piros él lehet BC , ekkor a piros élek egy három élből álló kört alkotnak. Lehet DC , vagy DB , ekkor a piros élek egy három élből álló utat alkotnak. Végül lehet DA . Lássuk ezt a három esetet:



Az első és a harmadik gráf a mi szempontunkból nézve ugyanaz, hiszen a színezést felcserélve a két gráf izomorf. Vizsgáljuk tehát ezt az esetet, az első gráf betűzését használjuk. ABC egy szabályos háromszög. D ugyanolyan távol van az A , B , C pontok mindegyikétől, tehát az ABC háromszög köré írható kör középpontja. Ezt az ábrát is már láttuk a fejezet legelején.

Következzen a legutóbbi ábra középső gráfja. Az ehhez tartozó elrendezést találják meg tapasztalatom szerint a legnehezebben a gyerekek. Vegyük észre, hogy DBC és DBA egybevágó háromszögek, hiszen DB oldaluk közös, $BC=DA$ és $DC=BA$. Ez azt jelenti, hogy $DBCA$ egy

szimmetrikus trapéz, amelynek két szára és rövidebb alapja egyenlő, valamint két átlója és a hosszabb alap is egyenlő. Rajzoljuk meg az ábrát, határozzuk meg a trapéz szögeit.



Az AD átló két végénél bejelöltünk egy-egy váltószöget, továbbá az egyenlő szárú ADC háromszög alapján fekvő két szöget. Legyen ennek a szögnek a nagysága α , ekkor $CDB\angle = DBA\angle = 2\alpha$, $DAB\angle = DBA\angle = DCB\angle = 2\alpha$, $BCA\angle = DAC\angle = \alpha$. Ezek alapján a trapéz szögeinek összege 10α , tehát a trapéz szögei 72° és 108° . Ismerős szögek! Persze, hiszen egy szabályos ötszög egy részletét látjuk! Megvan az utolsó, a 6. ábra is. Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

22. Adott a síkon n egyenes. Írjunk különböző egész számokat a metszéspontjaikra úgy, hogy minden egyenes mentén a számok szigorú monoton sorrendben legyenek.

Megoldás:

Tekintsünk egy olyan e egyenest, amely nem párhuzamos egyetlen olyan egyenessel sem, amely a megadott egyenesek metszéspontjai közül legalább kettőt tartalmaz. Ezzel az e egyenessel söpörjük végig a síkot, így a metszéspontok egyesével kerülnek rá, ebben a sorrendben meg is számozhatjuk őket.

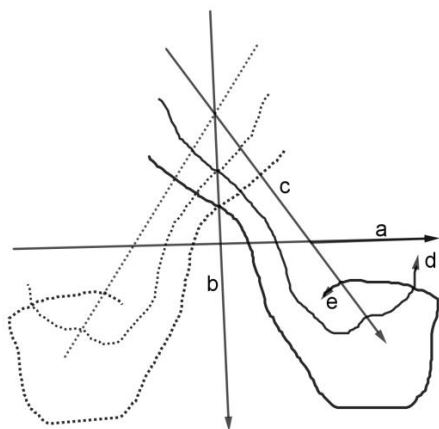
A feladat egy lehetséges általánosítása, ha egyenesek helyett pszeudoegyeneseket, illetve azok szakaszait tekintjük. Ezek egyszerű görbék, magukat nem metszik, bármely kettőnek legfeljebb egy metszéspontja lehet. Nem érinthetik egymást, mint a körök, hanem közös pont esetén elmetszik egymást, mint az egyenesek. Az első matematikus F. W. Levi, aki a pszeudoegyenesekkel foglalkozott publikációiban. Definíció: Tekintsük egy pszeudoegyenes két pontját, a pszeudoegyenes ezek közé eső zárt részét nevezzük pszeudoszakasznak.

23. Adott a síkon n pszeudoszakasz. Megszámozhatók-e a metszéspontjaik különböző pozitív egészekkel úgy, hogy a számozás mindegyik mentén szigorúan monoton legyen?

Megoldás:

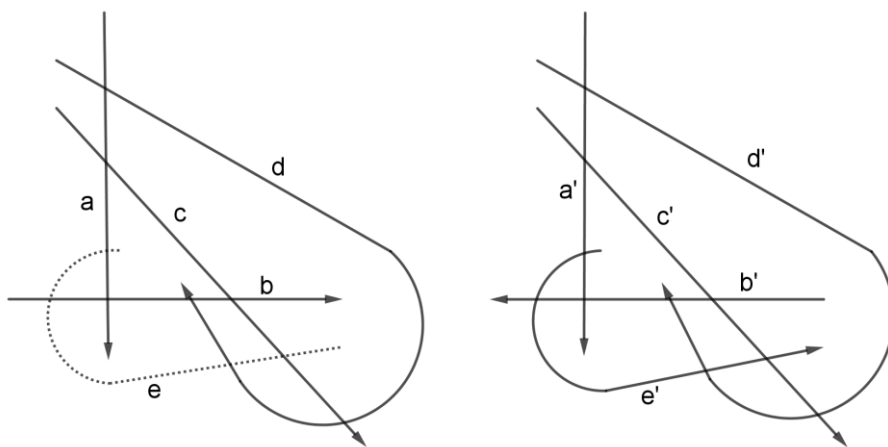
Ábránk pszeudoszakaszok egy olyan elrendezését mutatja, ahol a számozás nem végezhető el. Tegyük fel, sikerült a számozás, ekkor minden pszeudoszakaszra tehetünk egy nyilat a növekedés irányának megfelelően. Megmutatjuk, hogy a nyilak bármely irányítása esetén az ábrában kialakul irányított kör, amely a számozást lehetetlenné teszi.

Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy a mentén a nyíl balról jobbra mutat. Ha b fentről lefele mutat, akkor vizsgáljuk c , d , e -t, különben a maradék hármat. Ez a két eset szimmetrikus, ezért elegendő az elsőt megnézni.



Amennyiben a c , d , e bármelyike az ábrától eltérő irányba mutatna, akkor a -val és b -vel irányított kört alkotna. Más szavakkal: ha el akarjuk kerülni az irányított kört, akkor a és b iránya meghatározza c , d , e irányát. Viszont ez utóbbi három pszeudoszakasz, tehát c , d és e által meghatározott háromszög éppen egy irányított kört ad.

Ábránk mutatja, hogy a pszeudoszakaszok másként viselkednek, mint az egyenesek. Felmerül a kérdés, lehet-e 8-nál kevesebb pszeudoszakasszal ilyen elrendezést találni. Az alábbi ábrán bemutatok egy elrendezést, melyen 5 pszeudoszakasz van és nem számozható.



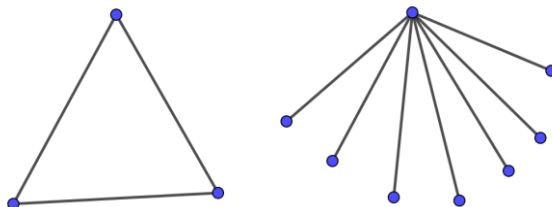
Rögzítsük a irányát fentről lefele. Az első esetben b balról jobbra mutat. a és b meghatározza c és d irányát. Ekkor b , c és d irányított kört ad. A második esetben minden szakaszt kis vesszővel egészítsünk ki. b' jobbról balra mutat. a' és b' meghatározza e' irányát. a' és e' meghatározza c' és d' irányát. De így c' , d' és e' irányított kört ad.

Négy pszeudoszakasz tetszőleges elrendezése esetén a nyilak elhelyezhetők anélkül, hogy irányított kört kapnánk. Ennek bizonyítása nem olyan érdekes, mint a meglepő eredmény, hogy 5-re van számozhatatlan ábra.

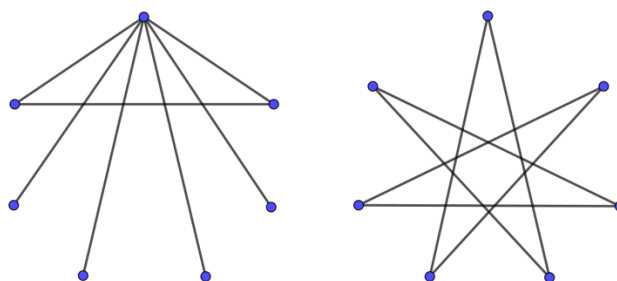
24. Rajzoljunk olyan gráfot, amelyben bármely két élnek pontosan egy közös pontja van. Az ilyen gráfokat nevezzük „kötés”-nek. (Élek metszésénél a pszeudoszakaszokhoz hasonló az elvárásunk.)

Megoldás:

Sokféle módon megadhatunk ilyen gráfot. Például egy háromszög, vagy egy csúcsból induló élek:



Harmadik konstrukciónk legyen egy konvex n -szög, csúcsai $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$. kössünk össze minden csúcsot P_0 -lal, valamint ehhez hozzávehetjük még a P_1P_{n-1} élt. Jó példa még tetszőleges páratlan k esetén a k oldalú csillagsokszög. Az alábbi ábrán $n=k=7$ -re láthatjuk ezt a két kötést:

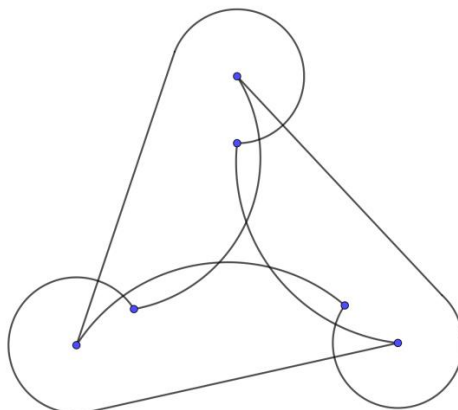


Példáinkban a gráf élei szakaszok voltak. Az ilyen gráfokat geometriai gráfoknak is szokták nevezni. Erdős Pál vette észre, hogy egy n csúcsú geometriai gráfnak legfeljebb n éle lehet. Ez bizonyított tétel. Ha az éleket pszeudoszakaszoknak tekintjük, akkor John H. Conway sejtése szerint egy n pontú kötésnek legfeljebb n éle lehet. (Conway's thrackle conjecture.) Conway 1000 dollárt ajánlott fel a bizonyításért, ez a mai napig nem született meg, így az állítás megmaradt sejtésnek. Ennek egy kicsi, de érdekes részletébe kalauzol az alábbi feladat.

25. Rajzoljunk olyan 6 pontú gráfot, ami kör és kötés egyszerre.

Megoldás:

Ezt a feladatot többször feladtam már diákjaimnak. Mivel a rajzot nem könnyű elkészíteni, többen azt gondolták, nem is lehet. Az alábbi példa egy szép elrendezést mutat:

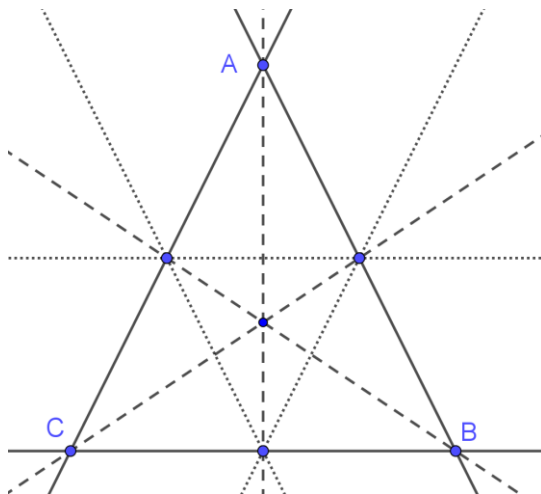


VII. Konstrukciók

26. Hogy helyezkedhet el 7 különböző pont a síkon, ha 9 egyenest határoznak meg?

Megoldás:

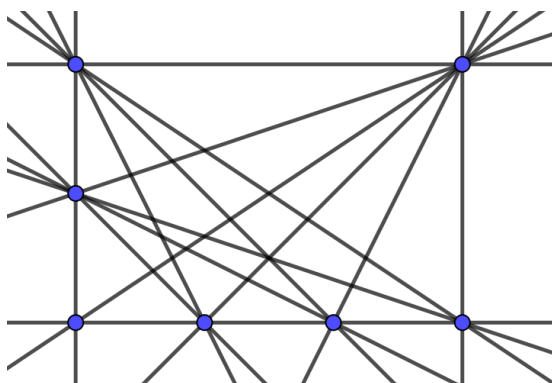
Legyen a hét pont az ABC háromszög csúcsai, oldalfelező pontjai és súlypontja. A kilenc egyenes közül három az ABC oldalegyenesei (ábránkon folyamatos vonal), három a súlyvonalai (ábránkon szaggatott vonal), három pedig a középvonalai (ábránkon pontozott vonal).



27. Vegyünk fel 7 különböző pontot a síkon úgy, hogy ha azokat páronként összekötjük, akkor összesen 14 különböző egyenest kapjunk!

Megoldás:

Ha nincs három pont egy egyenes mentén, akkor 21 egyenes lenne. Ha 3 pont egy egyenesre kerül, akkor az eddig számolt 3 egyenes helyett, csak 1-et határoznak meg. Így tehát 2-vel csökkenthető az egyenesek száma. Ha 3 helyett pont kerül egy egyenesre, akkor azok 6 helyett egy egyenest adnak, így 5-tel csökkent az egyenesek száma. Egy ilyen 2-es és 5-ös csökkentéssel tehát célhoz is értünk.



28. Helyezzünk el minél több pontot a síkon úgy, hogy közülük bármelyik három egyenlő szárú háromszöget alkosson.

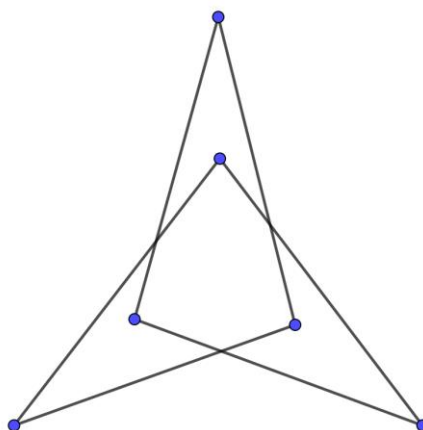
Megoldás:

Hat pontot el lehet így helyezni: egy szabályos ötszög és a középpontja.

29. Rajzoljunk önmagát metsző zárt töröttvonalat, melynek minden szakaszát pontosan egy másik szakasz metszi. Legalább hány szakaszból áll a töröttvonal? Lehet-e a szakaszok száma 7?

Megoldás:

Minden szakasznak van egy öt metsző párja, ezért a szakaszok száma páros. 4 szakasz még nem elég, 6 szakasz esetén jó megoldást mutat az alábbi ábra.

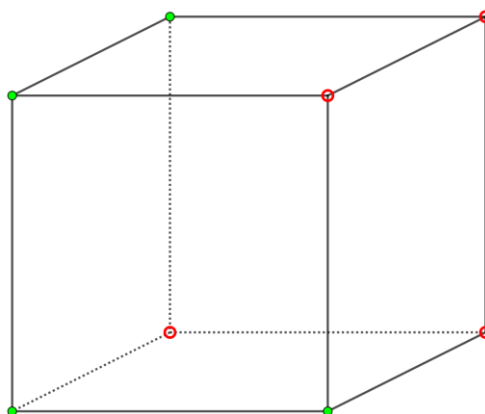


Érdeemes megkérdezni a diákoktól: Mit kérdezhetünk ez után? Ha felmerül a kérdés, be lehet bizonyítani, hogy található konstrukció minden 6-nál nagyobb páros számra.

30. Adjunk meg 4 piros és 4 zöld pontot a síkon úgy, hogy bármely három egyszínű pont a másik szín valamely pontjával együtt paralelogrammát alkosson.

Megoldás:

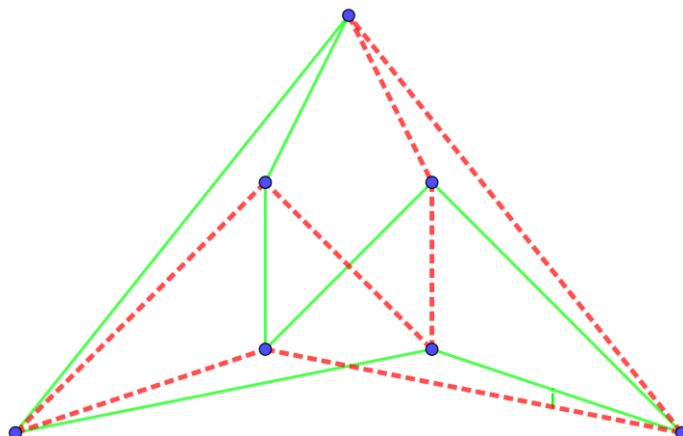
A feladatot feladhatjuk térben is. A síkbeli megoldás a térbelinek egy vetületeként is felfogható. Például jó megoldás egy kocka csúcsainak megfelelő színezése az alábbi ábra szerint (a piros pontokat karika jelöli):



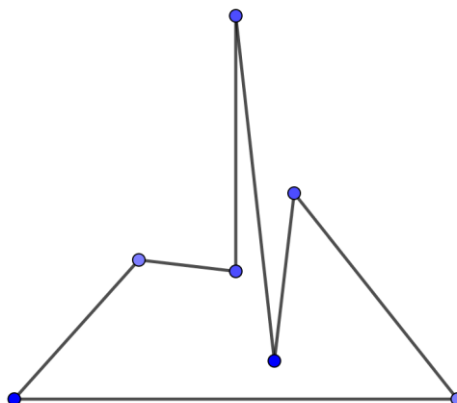
31. Adjunk meg két egybevágó hétszöget, melyeknek csúcsai azonosak, de egyetlen oldaluk sem közös.
A hétszögek lehetnek konkávak, de önmagukat ne messék.

Megoldás:

Erre többféle konstrukció is adható. Érdekes abból kiindulni, milyen egybevágósági transzformáció van a két hétszög között. Egy példát mutat az alábbi ábra.



Meglepő, hogy 3 hétszög is készíthető úgy, hogy ugyanazon 7 pont adja a csúcsaikat, de páronként nincs közös oldaluk! Ennek lerajzolása már kicsit nehezebb feladat. Az alábbi ábra ilyen hétszöget mutat. Egy nagyobb és egy kisebb szabályos háromszög csúcsait vettük úgy, hogy közös legyen a súlypontjuk, ez lesz a hetedik pont. A hétszöget $\pm 120^\circ$ -kal elforgatva a pontok helyzete invariáns, az élek pedig tetszőleges két hétszög esetén diszjunktak.



Az elrendezés érdekessége, hogy a hét pont között összesen $\binom{7}{2} = 21 = 3 \cdot 7$ szakasz húzható, így minden szakaszt pontosan egyszer használtunk fel.