Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Katolikus
Pedagógiai
Intézet

Középiskolai matematikatanárok szaktárgyi továbbképzése

SEGÉDANYAGOK

2021. március 19.

Összeállította:
Dr. Horváth Eszter
Kempelen Farkas Gimnázium

Differenciálszámítás
emelt szintű csoportban a 11. évfolyamon

I. Mi a szerepe a differenciálszámítás tanításának az emelt szintű matematika csoportokban?

A diákok a továbbtanulás szándékával, közülük sokan az emelt szintű érettségi tervével jönnek ebbe a csoportba. Lehetőségünk van arra, hogy az adott évfolyamon tanított témákat nagyobb mélységben tanítsuk, foglalkozzunk a nehezebb ötleteket igénylő feladatokkal is. Több időt tudunk szánni gyakorlásra.

Érdemes tovább lépnünk ennél, a gondolkodás minőségében is magasabbra érdemes eljutnunk. Az analízis elemei, ezen belül a differenciálszámítás, az absztrakciós gondolkodásnak egy új szintjét jelenti a diákoknak. Ez a lényeges különbség a középszintű és az emelt szintű csoportok között. A végtelen nagy és a végtelen kicsi fogalmával nem könnyű megbarátkozni. A differenciálszámítás ismerete az emelt szintű érettségi követelménye is. A főiskolai, egyetemi tanulmányokat nagyban tudjuk segíteni, ha ezekre a témákra kellő figyelmet és időt szánunk.

II. Milyen céllal született ez az anyag?

A 2021-es tanévben az emelt szintű érettségi témakörök közül a 11. foglalkozik a differenciál-számítással:

A differenciálhányados fogalma, deriválási szabályok. A differenciálszámítás alkalmazásai (érintő, függvényvizsgálat, szélsőértékfeladatok).

Az írásbeli- és a szóbeli érettségire való készülést szeretné segíteni ez az írás. A feladatok között szerepelnek érettségi feladatok (2004 előttiek és a kétszintű érettségiről is), OKTV feladatok és néhány KöMaL példa is. Nem a rutin gyakorlását tekintettem célnak, erre a szokásos feladatgyűjtemények lehetőséget biztosítanak. Több esetben ki szerettem volna emelni egy-egy fontosnak tartott gondolatot, megoldási módszert, ezzel segítve a helyes fogalmak kialakulását is. Két feladat pedig a derivált fizikai alkalmazását mutatja be.

Elméleti összefoglalót ez az anyag nem tartalmaz. A Pázmány Péter Katolikus Egyetem továbbképzései között az alábbiak foglalkoztak differenciálszámítással, ezekben az elméleti összefoglaló áttekinthető:

https://tovabbkepzes.itk.ppke.hu/content/Matematika/2013/18.pdf

https://tovabbkepzes.itk.ppke.hu/content/Matematika/2017/3.Differenci%C3%A1l_integr%C3%A1l.pdf

https://tovabbkepzes.itk.ppke.hu/content/Matematika/2018/1.Differenci%C3%A1lsz%C3%A1m%C3%ADt%C3%A1s_alkalmaz%C3%A1sai.pdf

A feladatok szövege, megoldások nélkül, az anyag végén megtalálható, innen célszerű tanítványainknak a feladatokat nyomtatni.

III. Függvénygörbe érintője

1. Igazoljuk, hogy az $f(x) = cos^2 x + \sin 2x$ és a $g(x) = -5x^2 + 2x + 1$ egyenletű görbék az $x = 0$ abszcisszájú pontjaikban érintik egymást. (Ebben a pontban azonos az érintőjük.)

Megoldás:

A függvénygörbe érintőjének meredekségét az első derivált adott pontbeli helyettesítési értéke adja meg:

$$f'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) + 2\cos 2x = -\sin 2x + 2\cos 2x$$

$f'(0) = 2$, az f függvény érintőjének meredeksége az $x = 0$ abszcisszájú pontban.

$$g'(x) = -10x + 2$$

$g'(0) = 2$, a g függvény meredeksége az $x = 0$ pontban.

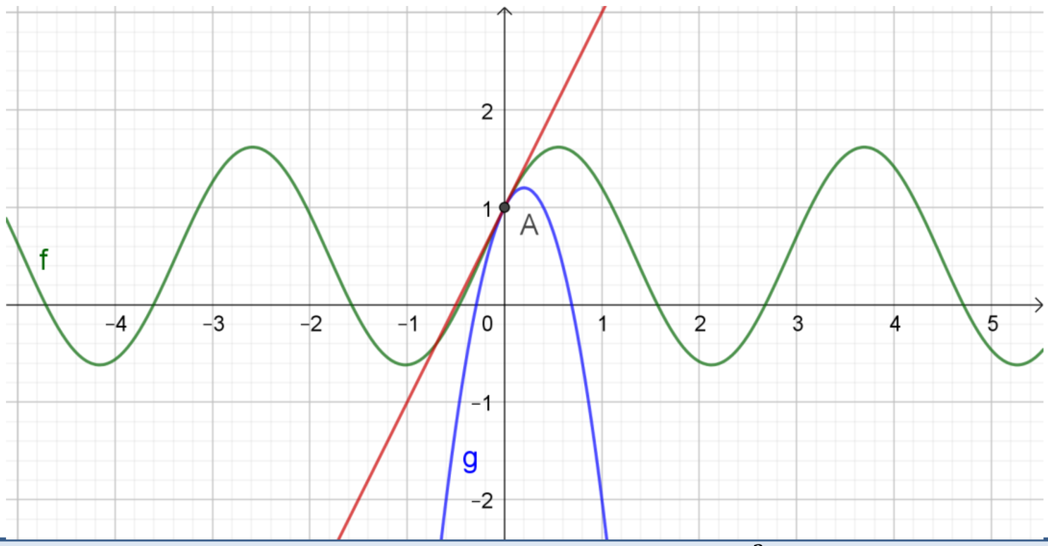
Tehát a két görbe érintőjének meredeksége azonos.

$f(0) = g(0) = 1$, ezért a $(0; 1)$ pont mindkét függvény grafikonjának pontja.

A közös érintő egyenlete:

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 1$$



2. A $12p \cdot x + 3q \cdot y + 121 = 0$ egyenletű egyenes érinti az $y = 4 \cdot x^2$ egyenletű parabolát, ahol p és q pozitív prímszámok. Határozza meg az egyenes és a parabola érintési pontjának koordinátáit!

OKTV 2011/2012; I. kategória, 2. forduló – kis módosítással

Megoldás:

Legyen az érintési pont $E(a; 4 \cdot a^2)$. Ez a pont rajta van az egyenesen is, ezért:

$$12p \cdot a + 3q \cdot 4 \cdot a^2 + 121 = 0.$$

A $y = 4x^2$ függvény érintőjének meredekségét az $(a; 4 \cdot a^2)$ pontban az első deriválttal határozzuk meg:

$$y' = 8x, \text{ tehát } m = 8a.$$

Az érintő egyenlete:

$$y - 4a^2 = 8a \cdot (x - a)$$

$$y = 8a \cdot x - 4a^2 \qquad (1)$$

A megadott egyenes egyenletét rendezzük át ilyen formára:

$$3qy = -12px - 121$$

$$y = -\frac{4p}{q} \cdot x - \frac{121}{3q} \qquad (2)$$

A (1) és (2) egyenletek akkor azonosak, ha a megfelelő együtthatók megegyeznek:

$$8a = -\frac{4p}{q}$$

$$4a^2 = \frac{121}{3q}$$

Az első egyenletből a-t kifejezzük és a másodikba helyettesítjük:

$$a = -\frac{p}{2q}$$

$$4 \cdot \frac{p^2}{4q^2} = \frac{121}{3q}$$

$$3p^2 = 11^2 q$$

p és q prímszámok, így a számelmélet alaptétele miatt $p = 11, q = 3$.

Ekkor $a = -\frac{11}{6}, 4a^2 = \frac{121}{9}$, az érintési pont $E\left(-\frac{11}{6}; \frac{121}{9}\right)$.

IV. Függvényvizsgálat derivált segítségével, szélsőértékfeladatok

3. Határozza meg az a, b, c valós számok értékét, ha az $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvénynek $x = 0$ zérushelye, $x = 1$ maximumhelye, az $x = 4$ helyen inflexiós pontja van.

Megoldás:

Ha a 0 a függvény zérushelye, akkor

$$f(0) = c = 0.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a derivált 0. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, tehát

$$f'(1) = 3 + 2a + b = 0. \qquad (*)$$

A függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol a második derivált 0. $f''(x) = 6x + 2a$, tehát

$$f''(4) = 24 + 2a = 0$$

$$a = -12$$

A $(*)$ összefüggést felhasználva:

$$b = -2a - 3 = 24 - 3 = 21$$

Tehát $a = -12; b = 21; c = 0;$ a függvény $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x$.

Ellenőrizhetjük a függvény vizsgálatával, hogy a feladat feltételei valóban teljesülnek erre a függvényre.

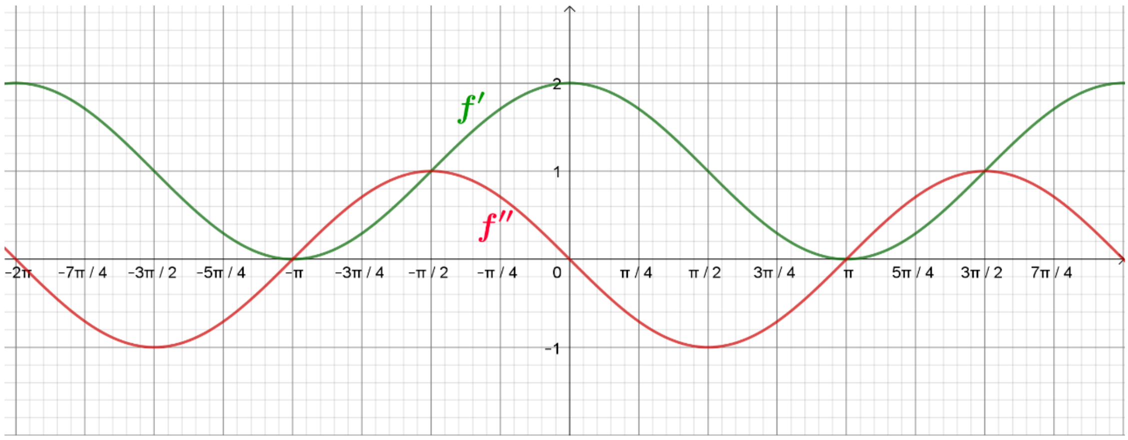
4. Vizsgálja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin x + x$ függvényt monotonitás és konvexitás szempontjából.

Megoldás:

Adjuk meg az első és a második deriváltat:

$$f'(x) = \cos x + 1$$

$$f''(x) = -\sin x$$



A függvény menetének vizsgálata az első derivált segítségével:

$\cos x \geq -1$, ezért $f'(x) = \cos x + 1 \geq 0$. Tehát egy-egy pont kivételével az első derivált pozitív. Ez azt jelenti, hogy a függvény szigorúan monoton nő. Bár „néha” a derivált nulla ($x = \pi + 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$ esetén), de ezekben a pontokban nem vált előjelet, tehát ezekben a pontokban nincs szélsőértéke.

$-1 \leq \sin x \leq 1$ alapján becslést tudunk adni a függvényértékre:

$$x - 1 \leq \sin x + x \leq x + 1.$$

$\lim\limits_{-\infty}(x-1) = -\infty;$ $\lim\limits_{-\infty}(x+1) = -\infty$, ezért $\lim\limits_{-\infty}(\sin x + x) = -\infty;$

$\lim\limits_{+\infty}(x-1) = +\infty;$ $\lim\limits_{+\infty}(x+1) = +\infty$, ezért $\lim\limits_{+\infty}(\sin x + x) = +\infty;$

A konvexitás vizsgálata a második derivált segítségével:

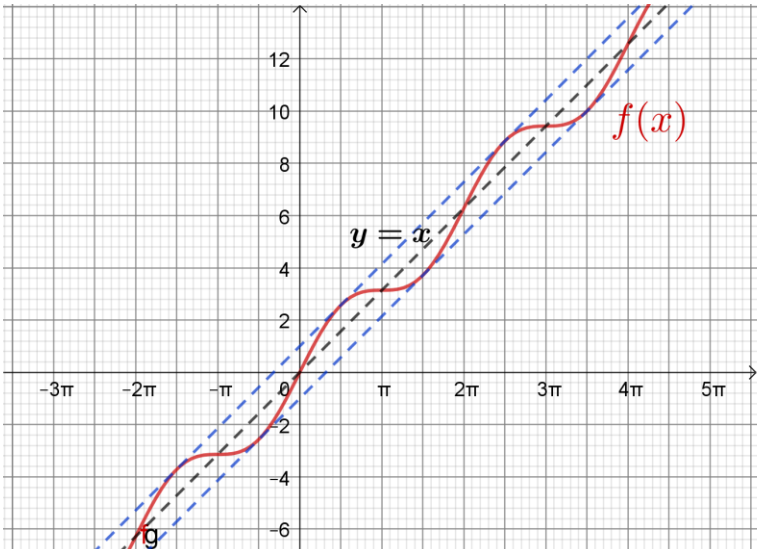
A függvény második deriváltjának előjeléből a konvexitásra következtethetünk:

Ha $-\pi + 2k\pi < x < 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$, akkor $f''(x) = -\sin x > 0$, tehát a függvény konvex.

Ha $2k\pi < x < \pi + 2k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$, akkor $f''(x) = -\sin x < 0$, tehát a függvény konkáv.

Az $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pontokban a második derivált 0, és előjelet vált, ezért ezekben a pontokban a függvénynek inflexiós pontja van.

A GeoGebrával készült grafikonon láthatjuk, hogyan valósul ez meg, és az $y = x$ egyeneshez is viszonyíthatjuk a kapott ábrát.



5. A $0 \leq x \leq 5$ valós számokra értelmezzük a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6}$$

Határozza meg az f legnagyobb és legkisebb értékét!

Érettségi-felvételi feladatok 2000.május 22.

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, ezért $x^2 - 5x - 6 \neq 0$, $x \neq -1; x \neq 6$. Ezek az értékek nem tartoznak az értelmezési tartományba.

Az $x = -1$ a számlálónak is zérushelye (a másik zérushely 5,5), ezért érdemes a számlálót és a nevezőt is szorzattá alakítani és egyszerűsíteni:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6} = \frac{(x+1)(2x-11)}{(x+1)(x-6)} = \frac{2x-11}{x-6}$$

Egy zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a derivált nulla, vagy az intervallum két végpontjában:

$$f'(x) = \frac{2(x-6) - 1 \cdot (2x-11)}{(x-6)^2} = \frac{-1}{(x-6)^2}$$

A derivált mindig negatív, ezért a függvény szigorúan monoton csökken a $[0; 5]$ intervallumban. A függvény a maximumát az $x = 0$-ban, minimumát az $x = 5$-ben veszi fel.

A maximum: $f(0) = \frac{11}{6}$; a minimum $f(5) = 1$.

Megjegyzés:

Ha nem vesszük észre az egyszerűsítési lehetőséget, akkor egy kicsivel több munkával jutunk ugyanerre az eredményre:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6}$$

$$f'(x) = \frac{(4x - 9) \cdot (x^2 - 5x - 6) - (2x^2 - 9x - 11) \cdot (2x - 5)}{(x^2 - 5x - 6)^2} =$$

$$= \frac{4x^3 - 20x^2 - 24x - 9x^2 + 45x + 54 - 4x^3 + 10x^2 + 18x^2 - 45x + 22x - 55}{(x^2 - 5x - 6)^2} =$$

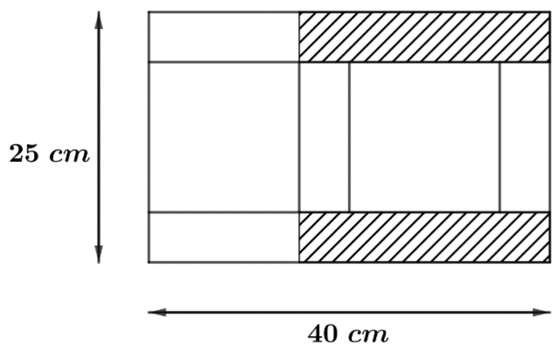
$$= \frac{-x^2 - 2x - 1}{(x^2 - 5x - 6)^2} = -\frac{(x + 1)^2}{(x^2 - 5x - 6)^2}$$

A $[0; 5]$ intervallumban ez értelmezve van. A tört értéke negatív, mert a négyzetszámok pozitívok. Így most is azt kapjuk. hogy az intervallum két végén vannak a szélsőértékek.

6. Egy 40 cm × 25 cm-es kartonlapból kivágunk két egybevágó téglalapot, az ábrán ezek vonalkázva láthatók. A megmaradt kartonlapból ezután (a berajzolt élek mentén) egy olyan téglatestet hajtogatunk, melynek magassága a kivágott téglalapok rövidebb oldalával egyenlő.

   a) Mekkora lesz a kapott téglatest felszíne, ha a kivágott téglalapok rövidebb oldala 2 cm-es?

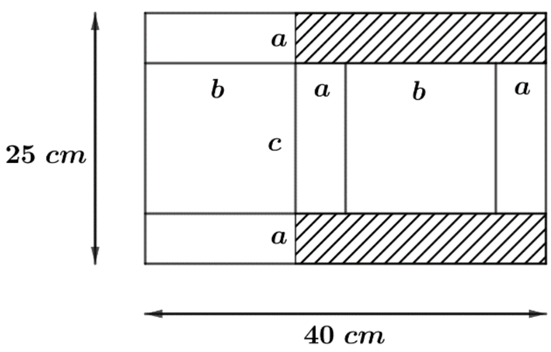
   b) Hogyan válasszuk meg a kivágott téglalapok rövidebb oldalának hosszát, ha azt szeretnénk, hogy az elkészített téglatest térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat?



Emelt szintű érettségi (magyar, mint idegen nyelv), 2015.május

Megoldás:

a)



A kivágott téglalap rövidebb oldala $a = 2$ cm, ezért

$$b = \frac{40\ cm - 2a}{2} = 18\ cm.$$

$$c = 25 \text{ cm} - 2a = 21 \text{ cm},$$

A téglatest felszíne:

$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc) =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 18 + 2 \cdot 21 + 18 \cdot 21) =$$
$$= 912\ (cm^2).$$

b) Az a) részben látott módon a-val kifejezzük a b és c oldalt és a téglatest térfogatát:

$$b = \frac{40-2a}{2} = 20 - a \qquad (a < 20)$$

$$c = 25 - 2a \qquad (a < 12{,}5)$$

$$V(a) = a \cdot (20-a) \cdot (25-2a) = 2a^3 - 65a^2 + 500a$$

A V függvény a $]0; 12{,}5[$ intervallumon van értelmezve. Ott lehet maximuma, ahol a derivált 0.

$$V'(a) = 6a^2 - 130a + 500 = 0$$

$$a = 5 \;\; vagy \; a = 16\frac{2}{3}.$$

Az értelmezési tartománynak csak az $a = 5$ eleme.

$$V''(a) = 12a - 130$$

$$V''(5) = -70 < 0,$$

ezért az $a = 5$ helyen a függvénynek maximuma van.

A maximális térfogatú téglatest élei: 5 cm; 15 cm; 15 cm.

A maximális térfogat $V = 5 \cdot 15 \cdot 15 = 1125\ (\mathrm{cm}^3)$.

7. Tekintse az

$$x \mapsto (p-2)x^2 + 2(p+1)x + p - 3$$

függvényt, ahol x bármely valós szám és p valós paraméter. Határozza meg a p értékét úgy, hogy a függvény legkisebb helyettesítési értéke -9 legyen! Mely x-nél veszi fel a függvény ezt a legkisebb értéket?

Külföldi tanulmányi ösztöndíjra pályázók feladata 1990

Megoldás:

Ha $p = 2$, akkor ez egy lineáris függvény, tehát nincs minimuma. A másodfokú függvények közül csak azoknak van minimuma, amelyekben a másodfokú tag együtthatója pozitív, ezért $p > 2$.

Az $f(x) = (p-2)x^2 + 2(p+1)x + p - 3$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol a derivált 0:

$$f'(x) = 2(p-2)x + 2(p+1) = 0.$$

Innen $x = -\frac{p+1}{p-2}$.

A minimum értéke -9:

$$-9 = (p-2)\left(-\frac{p+1}{p-2}\right)^2 + 2(p+1)\left(-\frac{p+1}{p-2}\right) + p - 3$$

$$-9(p-2) = (p+1)^2 - 2(p+1)^2 + (p-3)(p-2)$$

$$-9p + 18 = -7p + 5$$

$$p = 6{,}5$$

Ekkor $x = -\frac{p+1}{p-2} = -\frac{7{,}5}{4{,}5} = -\frac{5}{3}$.

8. Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára annyiszor 400 Ft-tal csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat.

a) Adja meg annak a B függvénynek az $x \to B(x)$ hozzárendelési utasítását, amelynél x az utasok számát, $B(x)$ pedig a társaság bevételét jelöli x utassal indított járat esetén! Mi a B függvény értelmezési tartománya?

b) Hány utas esetén lesz a repülőtársaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel?

Emelt szintű érettségi (magyar, mint idegen nyelv) 2010.május

Megoldás:

a) Ha $10 \leq x \leq 20$, akkor egy jegy 16 000 Ft, a bevétel $B(x) = 16\,000x$.

Ha $20 < x \leq 36$, akkor egy jegy $16\,000 - 400(x - 20)$, a bevétel

$$B(x) = (16\,000 - 400(x - 20)) \cdot x = -400x^2 + 24\,000x.$$

Tehát a függvény értelmezési tartománya:

$$\{x \in \mathbb{N} | 10 \leq x \leq 36\}$$

A hozzárendelési szabály:

$$B(x) = \begin{cases} 16\,000x, & \text{ha } 10 \leq x \leq 20 \quad x \in \mathbb{N} \\ -400x^2 + 24\,000x, & \text{ha } 20 < x \leq 36 \quad x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

b) Ha $10 \leq x \leq 20,$ akkor $x = 20$ esetén maximális a bevétel, $B(20) = 320\,000\ Ft.$

Ha $20 < x \leq 36$, akkor a valós számokon értelmezett $D(x) = -400x^2 + 24\,000x$ függvény maximumát keressük meg deriválással. Fontos tudni, hogy az egész számokon értelmezett függvény nem deriválható.

$$D'(x) = -800x + 24\,000.$$

$D'(x) = 0$, ha $x = 30$. $D''(x) = -800$, tehát a függvénynek itt lokális maximuma van. A 30 egész szám, ezért $x = 30$ az egész számokon értelmezett B függvénynek is a lokális maximumhelye.

$B(30) = 360\,000 > B(20)$, tehát a bevétel 30 utas esetében lesz a legnagyobb.

9. Egy szabályos háromoldalú egyenes hasáb térfogata $2dm^3$. Legalább mekkora a hasáb felszíne?

KöMaL 2019. február, C. 1531

Megoldás:

Az alaplap élét jelöljük x-el, a hasáb magasságát m-mel. Az alaplap egy szabályos háromszög, amelynek az éle x dm. Az alaplap területe $T_{alap} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, a térfogat V=$T_{alap} \cdot m = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m.$

Felhasználjuk, hogy a térfogat 2, tehát

$$\frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m = 2.$$

$$m = \frac{8}{x^2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{3x^2}.$$

A hasáb felszíne:

$$A(x) = 2 \cdot T_{alap} + 3xm = 2 \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot x \cdot \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{3x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{16}{x}\right)$$

A felszín akkor lesz minimális, amikor az $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ függvény. A feladat jelentése miatt $x > 0$.

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a derivált 0:

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = 0$$

$$2x^3 = 16$$

$$x = 2$$

Ha $x < 2$, akkor a derivált negatív, ha $x > 2$, akkor pedig pozitív. Ezért az $x = 2$ helyen a függvénynek minimuma van.

$A(x)$ minimális értéke $A(2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2^2 + \frac{16}{2}\right) = 6 \cdot \sqrt{3}$.

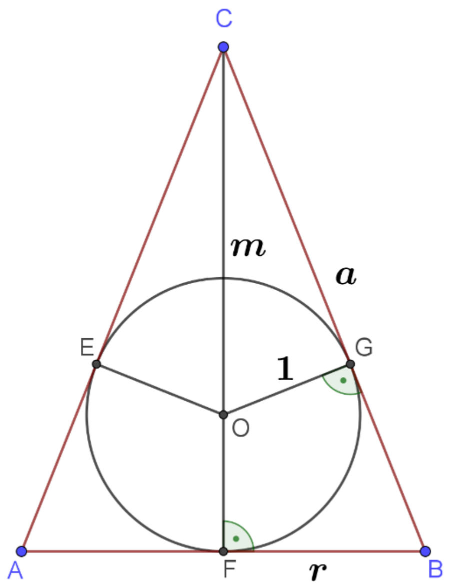
A hasáb felszíne legalább $6\sqrt{3}\ dm^2$.

10. Egységnyi sugarú gömb köré forgáskúpot írunk. Legalább mekkora a kúp felszíne?

KöMaL 1986. október; F. 2601.

I. Megoldás:

A forgáskúp tengelymetszetének jelöléseit használjuk:



$BFC\Delta \sim OGC\Delta$, mert mindkettő derékszögű és egyik hegyesszögük közös. A megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$r : 1 = a : (m-1)$$

$$a = r \cdot (m-1)$$

A BFC háromszögből Pitagorasz-tétel alapján:

$$a^2 = r^2 + m^2$$

Felhasználjuk az a-ra kapott értéket:

$$r^2 \cdot (m-1)^2 = r^2 + m^2$$

$$r^2 \cdot (m^2 - 2m + 1) = r^2 + m^2$$

$$r^2 \cdot m^2 - 2m \cdot r^2 + r^2 = r^2 + m^2$$

$$r^2 \cdot m^2 - 2m \cdot r^2 = m^2$$

$m \neq 0$, ezért az egyenletet m-mel oszthatjuk és átrendezzük:

$$r^2 \cdot m - m = m(r^2 - 1) = 2 \cdot r^2$$

$$m = \frac{2 \cdot r^2}{r^2 - 1}$$

Ezzel az értékkel kifejezzük az alkotót:

$$a = r \cdot \left(\frac{2 \cdot r^2}{r^2 - 1} - 1 \right) = r \cdot \left(\frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \right) = \frac{r^3 + r}{r^2 - 1}$$

A kúp felszíne:

$$A = r \cdot \pi \cdot (a + r) = r \cdot \pi \cdot \left(\frac{r^3 + r}{r^2 - 1} + r \right) = 2\pi \frac{r^4}{r^2 - 1}.$$

A felszín akkor minimális, amikor az $f(r) = \frac{r^4}{r^2-1}$ függvény (a feladat feltételeivel $r > 1$).

A függvénynek ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0.

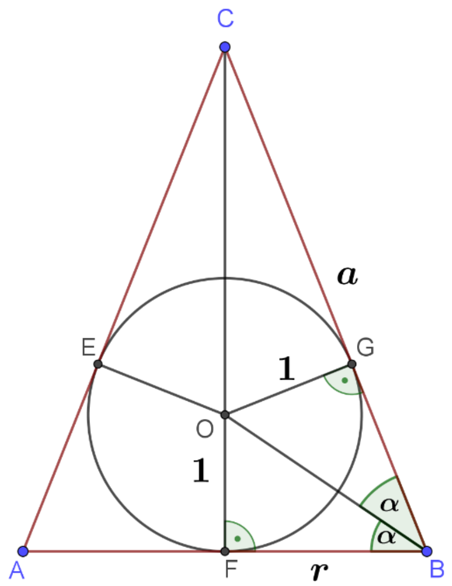
$$f'(r) = \frac{4r^3 \cdot (r^2 - 1) - r^4(2r)}{(r^2 - 1)^2} = \frac{2r^5 - 4r^3}{(r^2 - 1)^2} = \frac{2r^3(r^2 - 2)}{(r^2 - 1)^2}.$$

Az $r > 1$ feltétel mellett ez csak akkor lehet 0, ha $r^2 - 2 = 0$, tehát $r = \sqrt{2}$.

Ha $1 < r < \sqrt{2}$, akkor $f'(r) < 0$, tehát $f(r)$ szigorúan monoton csökken, ha $\sqrt{2} < r$, akkor $f'(r) > 0$, $f(r)$ szigorúan monoton nő. Ezek alapján a függvénynek $r = \sqrt{2}$ esetén van minimuma. Ekkor a minimális felszín $A = 2\pi \frac{r^4}{r^2-1} = 2\pi \frac{4}{2-1} = 8\pi$. A kúp felszíne tehát legalább 8π. (A gömb felszíne 4π, tehát a minimális felszínű forgáskúp kétszer akkora felszínű.)

II. Megoldás:

Próbálkozzunk szögekkel:



Az alapon fekvő szöget jelöljük 2α-val. OB ezt a szöget felezi. A beírható kör sugara 1. Az FBO derékszögű háromszögből $r = \frac{1}{tg\ \alpha}$. Az OBG háromszögből hasonlóan $BG = \frac{1}{tg\ \alpha}$.

$FOG\measuredangle = 180° - 2\alpha$, így $COG\measuredangle = 2\alpha$. A COG háromszögben $CG = tg\ 2\alpha$.

Ezek alapján $a = \frac{1}{tg\ \alpha} + tg\ 2\alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} + \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

A kúp felszíne:

$$A = r\pi(a+r) = \frac{1}{tg\ \alpha}\left(\frac{1}{tg\ \alpha} + \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} + \frac{1}{tg\ \alpha}\right)\cdot\pi = \left(\frac{2}{tg^2\alpha} + \frac{2}{1-tg^2\alpha}\right)\cdot\pi =$$

$$= \frac{2-2tg^2\alpha+2tg^2\alpha}{tg^2\alpha(1-tg^2\alpha)}\cdot\pi = \frac{2}{tg^2\alpha(1-tg^2\alpha)}\cdot\pi$$

Ez a kifejezés akkor lesz minimális. amikor a $tg^2\alpha(1-tg^2\alpha)$ kifejezés maximális.

Vezessük be az $x = tg^2\alpha$ jelülést és vizsgáljuk az $f(x) = x\cdot(1-x)$ függvényt, keressük a derivált zérushelyét:

$$f(x) = x - x^2$$

$$f'(x) = 1 - 2x = 0;\ \ f"(x) = -2 < 0$$

Tehát $x = \frac{1}{2}$ helyen a függvénynek maximuma van. Ez azt jelenti, hogy $tg^2\alpha = 0{,}5$ esetén lesz minimális a felszín, ami $\frac{2}{tg^2\alpha(1-tg^2\alpha)}\cdot\pi = \frac{2}{0{,}5\cdot 0{,}5}\cdot\pi = 8\pi$. A felszín ezek szerint legalább 8π.

V. Egyenlőtlenséget oldunk meg!

11. Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor

$$(2+\cos x)\cdot x > 3\sin x$$

OKTV 1973 I. forduló

Megoldás:

$-1 \leq \cos x \leq 1$, ezért $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$. Tehát $2 + \cos x$ pozitív, ha az egyenlőtlenséget ezzel a kifejezéssel elosztjuk, akkor az egyenlőtlenség iránya változatlan marad:

$$x > \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$$

Rendezzük át az egyenlőtlenséget:

$$x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} > 0.$$

Vizsgáljuk az

$$f(x) = x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$$

függvényt. $f(0) = 0$. Elég belátnunk, hogy a függvény szigorúan monoton nő, ha x pozitív.

$$f'(x) = \left(x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}\right)' = 1 - 3\frac{\cos x \cdot (2 + \cos x) - sinx(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(2 + \cos x)^2 - 3 \cdot (2 \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x)}{(2 + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{4 + 4 \cos x + \cos^2 x - 6 \cos x - 3}{(2 + \cos x)^2} = \frac{\cos^2 x - 2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} = \frac{(1 - \cos x)^2}{(2 + \cos x)^2}$$

Ez a kifejezés egy valós szám négyzete, ezért $\frac{(1-\cos x)^2}{(2+\cos x)^2} \geq 0$.

A derivált csak $\cos x = 1$ esetén 0, más esetekben pozitív, tehát s függvény szigorúan monoton nő.

Ezzel beláttuk állításunkat.

VI. Fizikai alkalmazások

A sebességet, a gyorsulást derivált segítségével definiálja a fizika. A következő két feladat ennek az alkalmazását mutatja be.

12. Egy egyenes vonalú mozgás kitérésfüggvénye

$$s: [0; 5] \to \mathbb{R}, \quad 5t^2 + 2t.$$

Az időt másodpercben, az utat méterben mérjük.

a) Számítsuk ki az $[1; 2]$ intervallumhoz tartozó átlagsebességet!

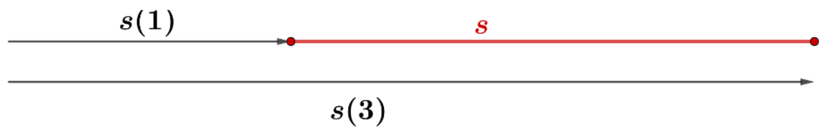
b) Számítsuk ki a $t = 1$ (s)-hoz tartozó pillanatnyi sebességet!

c) Adjuk meg a sebesség-idő függvényt!

Megoldás:

A feladatban megadott függvény egy lefelé dobott tárgy mozgását írja le.

a) Az $[1; 3]$ intervallumban megtett út:



$$s = s(3) - s(1) = 51 - 7 = 44(m)$$

Az eltelt idő: $t = 2(s)$

Az átlagsebesség $v_{átlag} = \frac{s}{t} = 22\ \frac{m}{s}$.

b) Az $[1; t]$ intervallumon az átlagsebesség t függvényeként:

$$\bar{v}(t) = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \frac{5t^2 + 2t - 7}{t - 1} = \frac{(5t + 7)(t - 1)}{t - 1} = 5t + 7 \quad \text{, ha } t \neq 1.$$

A pillanatnyi sebesség a „nagyon rövid" időre számított átlagsebesség:

$$\lim_{t \to 1} \frac{5t^2 + 2t - 7}{t - 1} = \lim_{t \to 1}(5t + 7) = 12\ \left(\frac{m}{s}\right)$$

c) A sebesség-idő függvény az út-idő függvény első deriváltja:

$$v(t) = s'(t) = 10t + 2$$

Valóban

$$v(1) = 12$$

13. A harmonikus rezgőmozgást végző test kitérését az $y(t) = 0{,}15 \sin\left(8\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$ függvény adja meg. A távolságot méterben, az időt másodpercben mérjük.

a) Mekkora a legnagyobb kitérés?

b) Mennyi idő alatt végez egy rezgést a test?

c) Határozzuk meg a sebességet az idő függvényében! Milyen határok között változik a sebesség?

d) Határozzuk meg a gyorsulást az idő függvényében! Milyen határok között változik a gyorsulás?

Megoldás:

a) Az $y(t)$ függvény maximuma 0,15. Ez azt jelenti, hogy a rezgő test $0{,}15\ \text{m} = 15\ \text{cm}$ amplitúdóval rezeg.

b) A szinuszfüggvény periódusa 2π. Ha T idő alatt végez a test egy rezgést, akkor

$$8\pi \cdot T = 2\pi$$

$$T = \frac{1}{4}\ (s)$$

Tehát 0,25 s alatt végez egy rezgést a test, a rezgésidő 0,25 s. Ez azt is jelenti, hogy 1 s alatt 4 rezgést végez, a frekvencia $f = 4\frac{1}{s} = 4$ Hz.

c) A sebesség a kitérés függvény idő szerinti első deriváltja:

$$v(t) = y'(t) = 0{,}15 \cdot 8\pi \cdot \cos\left(8\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) = 1{,}2\pi \cdot \cos\left(8\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Ennek a függvénynek a maximuma $1{,}2\pi \approx 3{,}77$. A rezgő test legnagyobb sebessége $3{,}77\ m/s$. A sebesség $-3{,}77\ m/s$ és $+3{,}77\ m/s$ között változik.

d) A gyorsulás a sebességfüggvény idő szerinti első deriváltja (a kitérésfüggvény második deriváltja).

$$a(t) = v'(t) = -1{,}2\pi \cdot 8\pi \cdot \sin\left(8\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) = -9{,}6\pi^2 \cdot \sin\left(8\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Az $a(t)$ függvény maximuma $9{,}6\pi^2 \approx 94{,}75$. A legnagyobb gyorsulás $94{,}75\ m/s^2$, a mozgás során $-94{,}75\ m/s^2$ és $+94{,}75\ m/s^2$ közötti értékeket vesz fel.

VII. Csak szakkörre a bátraknak!

14. Ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ tetszőleges pozitív számok, és x tetszőleges 0-tól különböző valós szám, az

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

számot az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok x-edik hatványközepének nevezzük. ($x = 1$ esetén a számtani közepet, $x = -1$ esetén a harmonikus közepet, $x = 2$ esetén a kvadratikus közepet kapjuk.) Bizonyítsuk be, hogy rögzített $a_1, a_2, \dots, a_n$ mellett $f(x)$ az x-nek monoton növő függvénye.

OKTV 1969-es feladathoz megjegyzés

Megoldás:

Tudjuk, hogy $(e^x)' = e^x$; $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Ezt felhasználva:

$$f'(x) = \left(\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n}\right)}\right)' =$$

$$= e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n}\right)} \cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n}\right) + \frac{1}{x}\cdot\frac{n}{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}\cdot\frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \dots + a_n^x \ln a_n}{n}\right]$$

$$= e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n}\right)} \cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n}\right) + \frac{1}{x}\cdot\frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \dots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}\right]$$

Az első tényező pozitív. Megmutatjuk, hogy a második tényező is az:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \dots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x} \geq \frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n}\right)$$

$$x \cdot (a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \cdots + a_n^x \ln a_n) \geq (a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x) \ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)$$

$$\frac{a_1^x \ln a_1^x + a_2^x \ln a_2^x + \cdots + a_n^x \ln a_n^x}{n} \geq \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)$$

Vizsgáljuk meg az $f(z) = z \cdot \ln z$ függvényt konvexitás szempontjából:

$$f'(z) = 1 \cdot \ln z + z \cdot \frac{1}{z} = \ln z + 1$$

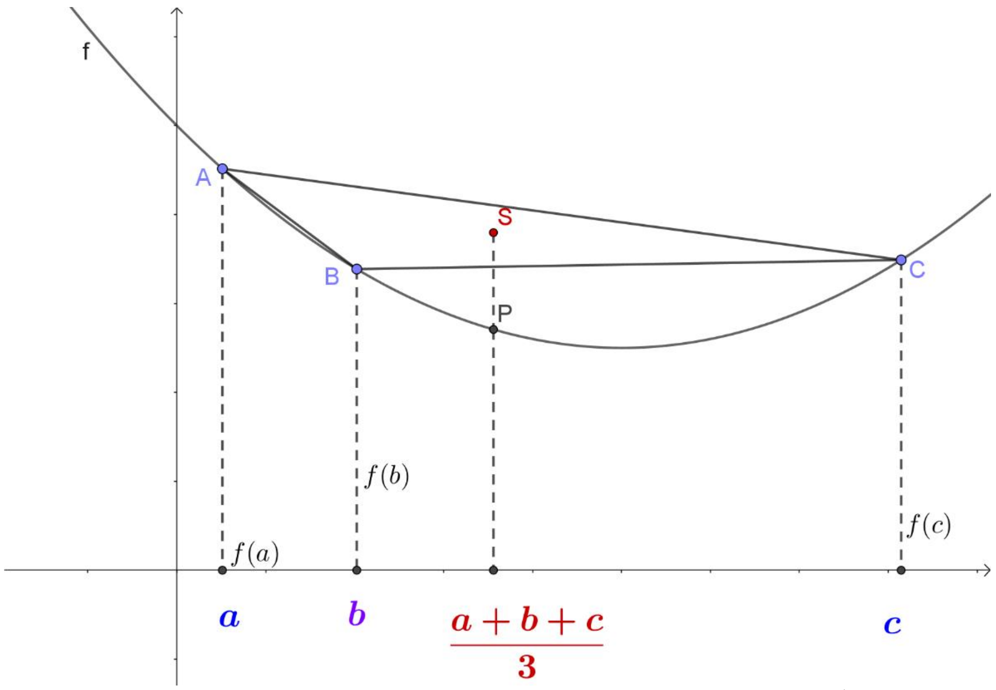
$$f''(z) = (\ln z + 1)' = \frac{1}{z} > 0,$$

Tehát a függvény konvex.

Ezen függvény a_1^x; a_2^x; …; a_n^x helyeken felvett értékeinek számtani közepe szerepel a bal oldalon, és a jobb oldalon pedig az a_1^x; a_2^x; …; a_n^x számok számtani közepén felvett értéke látható. Konvex függvények esetében ez az egyenlőtlenség teljesül Ez a Jensen-egyenlőtlenség.

Megjegyzés:

Az ábrán 3 szám esetében, konvex függvényre látjuk a Jensen-egyenlőtlenség állítását:



Az $ABC\,\Delta$ súlypontja, $S\left(\frac{a+b+c}{3}; \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\right)$ a függvény $P\left(\frac{a+b+c}{3}; f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\right)$ pontja felett van, ezért:

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

Ha egy függvényről tudjuk, hogy konvex, akkor ez az egyenlőtlenség tetszőleges számra teljesül. Konkáv függvények esetében az egyenlőtlenség iránya fordított.

VIII. Feladatlap

1. Igazoljuk, hogy az $f(x) = cos^2 x + \sin 2x$ és a $g(x) = -5x^2 + 2x + 1$ egyenletű görbék az $x = 0$ abszcisszájú pontjaikban érintik egymást. (Ebben a pontban azonos az érintőjük)

2. A $12p \cdot x + 3q \cdot y + 121 = 0$ egyenletű egyenes érinti az $y = 4 \cdot x^2$ egyenletű parabolát, ahol p és q pozitív prímszámok. Határozza meg az egyenes és a parabola érintési pontjának koordinátáit!

OKTV 2011/2012; I. kategória, 2. forduló – kis módosítással

3. Határozza meg az a, b, c valós számok értékét, ha az $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvénynek $x = 0$ zérushelye, $x = 1$ maximumhelye, és $x = 4$ helyen inflexiós pontja van.

4. Vizsgálja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \sin x + x$ függvényt monotonitás és konvexitás szempontjából.

5. A $0 \leq x \leq 5$ valós számokra értelmezzük a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 9x - 11}{x^2 - 5x - 6}$$

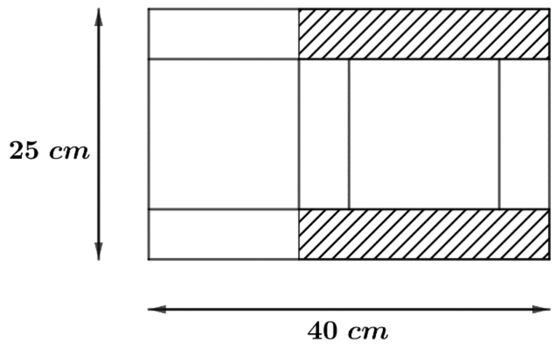
Határozza meg az f legnagyobb és legkisebb értékét!

Érettségi-felvételi feladatok 2000.május 22.

6. Egy 40 cm × 25 cm-es kartonlapból kivágunk két egybevágó téglalapot, az ábrán ezek vonalkázva láthatók. A megmaradt kartonlapból ezután (a berajzolt élek mentén) egy olyan téglatestet hajtogatunk, melynek magassága a kivágott téglalapok rövidebb oldalával egyenlő.

e) Mekkora lesz a kapott téglatest felszíne, ha a kivágott téglalapok rövidebb oldala 2 cm-es?

f) Hogyan válasszuk meg a kivágott téglalapok rövidebb oldalának hosszát, ha azt szeretnénk, hogy az elkészített téglatest térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat?



Emelt szintű érettségi (magyar, mint idegen nyelv), 2015.május

7. Tekintse az

$$x \mapsto (p-2)x^2 + 2(p+1)x + p - 3$$

függvényt, ahol x bármely valós szám és p valós paraméter. Határozza meg a p értékét úgy, hogy a függvény legkisebb helyettesítési értéke -9 legyen! Mely x-nél veszi fel a függvény ezt a legkisebb értéket?

Külföldi tanulmányi ösztöndíjra pályázók feladata 1990

8. Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára annyiszor 400 Ft-tal csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat.

   a) Adja meg annak a B függvénynek az $x \to B(x)$ hozzárendelési utasítását, amelynél x az utasok számát, $B(x)$ pedig a társaság bevételét jelöli x utassal indított járat esetén! Mi a B függvény értelmezési tartománya?

   b) Hány utas esetén lesz a repülőtársaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel?

Emelt szintű érettségi (magyar, mint idegen nyelv) 2010.május

9. Egy szabályos háromoldalú egyenes hasáb térfogata $2dm^3$. Legalább mekkora a hasáb felszíne?

KöMaL 2019. február, C. 1531

10. Egységnyi sugarú gömb köré forgáskúpot írunk. Legalább mekkora a kúp felszíne?

KöMaL 1986. október; F. 2601.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor

$$(2 + \cos x) \cdot x > 3 \sin x$$

OKTV 1973 I. forduló

12. Egy egyenes vonalú mozgás kitérésfüggvénye

$$s: [0; 5] \to \mathbb{R}, \;\; 5t^2 + 2t.$$

Az időt másodpercben, az utat méterben mérjük.

   a) Számítsuk ki az $[1; 2]$ intervallumhoz tartozó átlagsebességet!

   b) Számítsuk ki a $t = 1$ (s)-hoz tartozó pillanatnyi sebességet!

   c) Adjuk meg a sebesség-idő függvényt!

13. A harmonikus rezgőmozgást végző test kitérését az $y(t) = 0{,}15 \sin\left(8\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$ függvény adja meg. A távolságot méterben, az időt másodpercben mérjük.

   a) Mekkora a legnagyobb kitérés?

   b) Mennyi idő alatt végez egy rezgést a test?

   c) Határozzuk meg a sebességet az idő függvényében! Milyen határok között változik a sebesség?

   d) Határozzuk meg a gyorsulást az idő függvényében! Milyen határok között változik a gyorsulás?

14. Ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ tetszőleges pozitív számok, és x tetszőleges 0-tól különböző valós szám, az

$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

számot az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok x-edik hatványközepének nevezzük. ($x = 1$ esetén a számtani közepet, $x = -1$ esetén a harmonikus közepet, $x = 2$ esetén a kvadratikus közepet kapjuk.) Bizonyítsuk be, hogy rögzített $a_1, a_2, \dots, a_n$ mellett $f(x)$ az x-nek monoton növő függvénye.

OKTV 1969-es feladathoz megjegyzés