PÁZMÁNY PÉTER KATOLIKUS EGYETEM
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Katolikus Pedagógiai Intézet

Középiskolai matematikatanárok szaktárgyi továbbképzése

SEGÉDANYAGOK

2021. március 19.

Összeállította:

Dr. Kiss Géza

Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

Egyenlőtlenségek

I. Bevezetés.

Ez a rövid válogatás a 2021. március 19-én a Pázmány Péter Katolikus Egyetem továbbképzése keretében elhangzott előadáshoz kapcsolódó anyagokat tartalmazza. A feladatok összeállításánál a következő szempontokat követtem. A válogatásban szereplő feladatok:

- legyenek az emelt szintű csoportokban és matematika szakkörökön tárgyalhatók,
- ne haladja meg a szükséges elméleti háttér az emelt szintű tantervi követelményeket és azt a néhány bővítést, amely az előadáson is elhangzott,
- lehetőség szerint a rendelkezésre álló eszközökkel többféle megoldást is adjunk egy-egy feladatra, ezzel módot teremtve a módszerek összehasonlítására,
- az egyes részek követik az előadás felépítését,
- az irodalomjegyzékben további gyakorló feladatok találhatók, bár több esetben a feladatok nehezebbek és további elméleti ismeretet, egyedi módszert is igényelnek.

Néhány probléma a témakör tanítása kapcsán:

- Olyan minimális a tantervi követelmény, hogy nagyon korlátozottak az alkalmazási lehetőségek.
- Sablonosak, nem eléggé gondolkodásra serkentőek a kitűzhető feladatok.
- Nincs kitekintésük a gyerekeknek a témakörben rejlő lehetőségekre.
- Nincs sikerélmény, csökken a motiváció az önálló problémamegoldásra, a versenyzésre.
- Egysíkúak az érettségi szóbeli feleletek.
- „Így már jobb lenne, ha nem is tanítanánk”.

Ezzel szemben több érv is szól amellett, hogy nagyobb hangsúlyt kapjon ez a témakör:

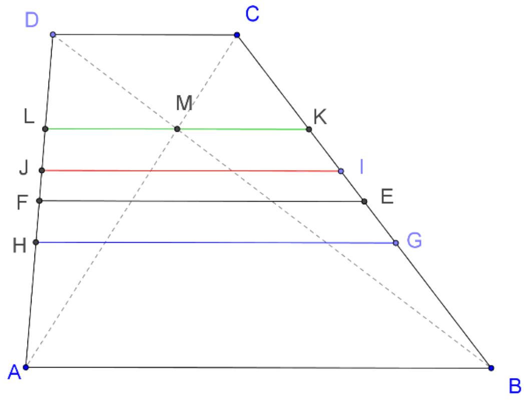
- Remek lehetőségeket nyújtanak különféle témakörök előkészítésére (pl. szélsőérték-feladatok, statisztikai jellemzők.)
- Számtalan fontos és szép alkalmazási területük van.
- Érdekessé tehetők a sokszor unalmasnak tűnő algebrai gyakorlások.
- Sikerélményhez juttatják a gyerekeket.
- Színesíthetők az emelt szintű szóbeli feleletei.
- Hagyományosan szerepelnek ilyen típusú feladatok különféle versenyeken is.

II. Geometriai szemléltetés

1. Legyenek az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = a,\ \ CD = c, a \geq c$. Húzzunk az alapokkal párhuzamosan egyeneseket, amelyek sorra a következő tulajdonságúak:
   - felezi a szárakat,
   - két egyenlő területű részre osztja a trapézt,
   - két hasonló trapézra bontja az eredeti trapézt,
   - átmegy az átlók metszéspontján.

   Fejezzük ki az egyes párhuzamosok trapéz szárai közé eső szakaszainak hosszát a két alap hosszával.

Megoldás: Készítsünk ábrát!



A feladatban szereplő kérdések sorrendjében legyen EF a trapéz középvonala, GH a területet felező szakasz, IJ a trapézt két hasonló trapézra bontó szakasz, végül KL az átlók metszéspontján átmenő párhuzamos szakasz.

A középvonalról közismert, hogy az alapok számtani közepe: $EF = \frac{a+c}{2}$. A következő könnyen megválaszolható kérdés az IJ szakasz hossza. Mivel az $ABIJ$ és $JICD$ trapézok hasonlók, a megfelelő oldalak aránya megegyezik: $\frac{IJ}{AB} = \frac{CD}{IJ}$, ahonnan $IJ^2 = AB \cdot CD$, vagyis $IJ = \sqrt{ac}$. A trapézt két hasonló trapézra bontó, alapokkal párhuzamos szakasz hossza a két alap mértani közepe.

Most térjünk rá a KL szakasz hosszának meghatározására. Külön számítjuk ki a KM és ML hosszát.

A KM szakasz párhuzamos az alapokkal, ezért $BAC\Delta \sim KMC\Delta$, és $CDB\Delta \sim KMB\Delta$. A megfelelő oldalak aránya a két háromszögben:

$$\frac{KM}{BA} = \frac{CK}{BC}, \qquad \frac{KM}{CD} = \frac{KB}{BC}.$$

A két egyenlőség megfelelő oldalait összegezve:

$$\frac{KM}{a} + \frac{KM}{c} = \frac{CK + KB}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

Innen már kifejezhető a KM szakasz hossza: $c \cdot KM + a \cdot KM = ac \Leftrightarrow KM = \dfrac{ac}{a+c}$.

Az ML szakasz párhuzamos az alapokkal, ezért $ABD\Delta \sim LMD\Delta$, és $CDA\Delta \sim MLA\Delta$. A megfelelő oldalak aránya a két háromszögben:

$$\frac{LM}{AB} = \frac{DL}{DA}, \qquad \frac{LM}{DC} = \frac{LA}{DA}.$$

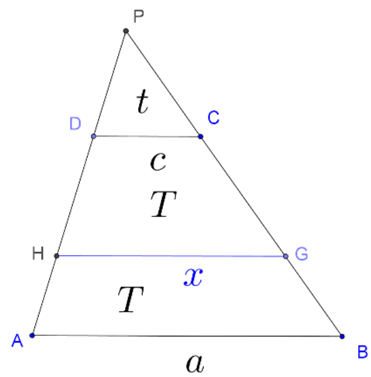
A két egyenlőség megfelelő oldalait ismét összegezve:

$$\frac{LM}{a} + \frac{LM}{c} = \frac{DL + LA}{DA} = \frac{DA}{DA} = 1, \qquad \Rightarrow LM = \frac{ac}{a+c}.$$

Önmagában is érdekes (jól ismert) eredmény, hogy az átlók metszéspontja felezi a KL szakaszt.

Eközben megkaptuk, hogy $KL = \dfrac{2ac}{a+c} = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$, az alapok harmonikus közepe.

Végül határozzuk meg a területet felező párhuzamos szakasz hosszát. Amennyiben a két alap egyenlő hosszúságú, akkor ez a szakasz éppen a középvonal és nincs további bizonyításra szükség. Feltehetjük tehát a továbbiakban, hogy $c < a$. Így a két szár metszi egymást P pontban. (CDP a trapéz kiegészítő háromszöge.) A következő ábrán lényegében már csak azok az adatok szerepelnek, amelyekre a számítás során szükség lesz. Legyen a keresett GH szakasz hossza x, a kiegészítő háromszög területe t, a két egyforma területű trapéz területe T.



Az ABP és DCP háromszögek hasonlók, a területeik aránya megegyezik a megfelelő oldalak arányának négyzetével: $\dfrac{2T+t}{t} = \dfrac{a^2}{c^2}$.

Ugyanezzel a módszerrel az GHP és CDP háromszögek hasonlók, a területeik aránya megegyezik a megfelelő oldalak arányának négyzetével: $\dfrac{T+t}{t} = \dfrac{x^2}{c^2}$. Szorozzuk meg a második egyenletet 2-vel, majd vonjuk ki a másodikból az elsőt: $\dfrac{2T+2t}{t} - \dfrac{2T+t}{t} = \dfrac{2x^2}{c^2} - \dfrac{a^2}{c^2} \Rightarrow \dfrac{2x^2}{c^2} - \dfrac{a^2}{c^2} = 1.$

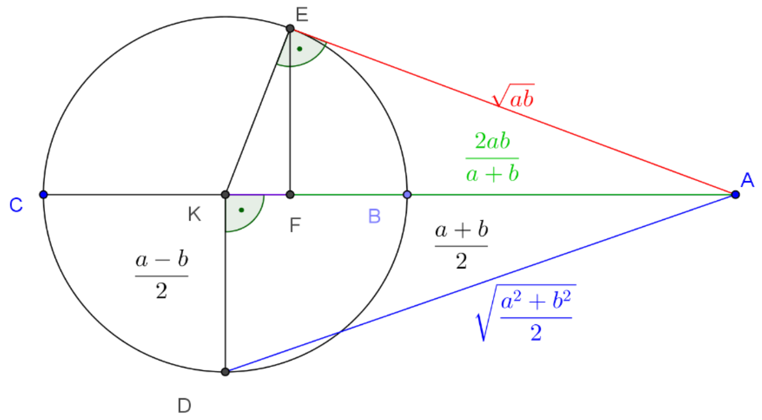
Rendezés után: $\dfrac{2x^2}{c^2} = \dfrac{a^2}{c^2} + 1 \iff 2x^2 = a^2 + c^2 \iff x = \sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}.$

Véleményem szerint valamelyik geometriai interpretáció színesítheti az emelt szintű szóbeli feleletet. Különösen az előadáson ismertetett modellben kényelmesen láthatók az egyes közepek közötti nagyságviszonyok is, természetesen mindez csak $n = 2$ esetben. A most tárgyalt modellben is azonnal látható, hogy $c < a$ esetben a négyzetes közép nagyobb, mint a számtani közép, hiszen a középvonal nem osztja két egyforma területű részre a trapézt. A harmonikus és a mértani pedig kisebb, mint a számtani közép. (Az átlók metszéspontja a középvonaltól a kisebb alap felé esik, míg a középvonal nem bonthatja két hasonló trapézra az eredetit, mert a két magasság megegyezne.) A harmonikus és a mértani közép összehasonlításához azt érdemes megfontolni, hogy a két hasonló trapéz magasságainak aránya $\sqrt{\frac{a}{c}}$, míg az átlók metszéspontjának a távolságait tekintve az alapoktól azok aránya $\frac{a}{c}$. A feltétel szerint $a > c$, $\frac{a}{c} > 1$, ebben az esetben tudjuk, hogy $\frac{a}{c} > \sqrt{\frac{a}{c}}$.

Érdemes tovább színesíteni a nevezetes közepek skáláját és a geometriai szemléltetést is. Könnyen tárgyalható és nagyon szemléletes a közepek következő geometriai megjelenítése. Az emelt szintű érettségin hatásos és érdekes része lehet a feleletnek.

2. Legyen $AC = a$, $AB = b$ a mellékelt ábra szerint. $(a > b)$ Legyen K pont a BC szakasz felezőpontja. BC szakasz Thalész-körét a BC-re K pontban állított merőleges D pontban metszi. Az A pontból a körhöz húzott érintő érintési pontja E pont, végül az E pontból az AC-re állított merőleges talppontja F pont. Igazoljuk, hogy

$$AK = \frac{a+b}{2},\ AD = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\ AE = \sqrt{ab},\ AF = \frac{2ab}{a+b}.$$



Megoldás: BC szakasz hossza $a-b$, a Thalész-kör sugara $\frac{a-b}{2}$.

Az AK szakasz hossza $AK = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Számítsuk ki az AKD derékszögű háromszög átfogóját Pitagorasz tételével:

$AD^2 = AK^2 + KD^2 = \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2}$. Ebből látjuk, hogy $AD = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Következő lépésben számoljuk ki szintén Pitagorasz tételével AKE háromszög AE befogóját:

$AE^2 = AK^2 - KE^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$. Azonnal kapjuk, hogy $AE = \sqrt{ab}$.

Az AF szakasz kiszámításához használjuk a befogótételt az AKE derékszögű háromszög AE befogójára: $AE^2 = AF \cdot AK$, ahonnan

$AF = \frac{AE^2}{AK} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$, a harmonikus közép.

Külön feladatban mutatom be a kevésbé ismert kontraharmonikus közepet és geometriai megjelenítésének lehetőségét a két modellben.

3. Az a és b pozitív valós számok *kontraharmonikus közep*ének nevezzük a $k = \frac{a^2+b^2}{a+b}$ számot.
Mutassuk meg, hogy ez
- valóban közép, azaz a és b közé esik
- nagyobb vagy egyenlő, mint a kvadratikus közép,
- a számtani és kontraharmonikus közép mértani közepe a kvadratikus közép,
- adjunk ennek a középnek is geometriai értelmezést.

Megoldás:

Ha a két szám egyenlő, akkor $k = \frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{2a^2}{2a} = a.$ Ha $a > b,$ akkor

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} < \frac{a^2+ab}{a+b} = a \text{ és } \frac{a^2+b^2}{a+b} > \frac{ab+b^2}{a+b} = b.$$

Most hasonlítsuk össze a kvadratikus középpel:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} = \frac{\frac{a^2+b^2}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{\frac{a+b}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

mivel a kvadratikus közép, nagyobb mint a számtani közép ebben az esetben $(a > b)$. Az előbbi becslés már mutatja a harmadik kérdésre is a választ:

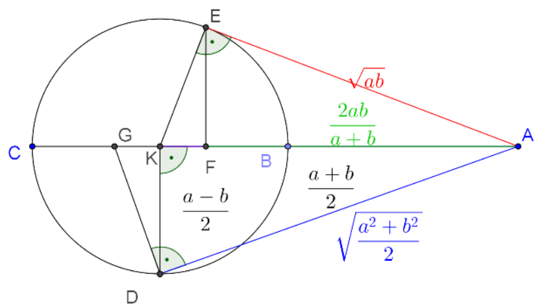
$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{a^2+b^2}{2} = \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2.$$

A geometriai szemléltetéshez tekinthetjük a második geometriai modellhez készült készült ábrát.

Állítsunk merőlegest az *AD* szakaszra a *D* pontban.

Messe ez a merőleges az *AC* szakaszt a *G* pontban.

Azt állítjuk, hogy az AG szakasz hossza éppen az *a* és *b* számok kontraharmonikus közepe. Az ADG derékszögű háromszögben az AD befogónak az AG átfogóra eső merőleges vetülete az AK szakasz.



A befogótétel alapján $AD^2 = AG \cdot AK,$ ez pedig (az előző részeredmény alapján) éppen azt jelenti, hogy AG a kontraharmonikus középpel megegyező hosszúságú.

$$AG=\frac{AD^2}{AK}=\frac{\frac{a^2+b^2}{2}}{\frac{a+b}{2}}=\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Így egy ábrán láthatjuk az összes közepek nagyság szerinti viszonyait $n=2$ esetén. Érdekes megjegyezni, hogy a trapézos geometriai modellben a harmonikus közép a szárakat az alapok arányában osztó, az alapokkal párhuzamos szakasz, amelyről kiderült, hogy az átlók metszéspontján is átmegy. Itt tudjuk, hogy a hosszabbik alaptól távolabbi osztópontokat kell venni a szárakon. Ha most szintén az alapok arányában osztjuk a szárakat, de ellentétesen súlyozva, akkor éppen az *alapok kontraharmonikus közepe* lesz a két osztópontot összekötő szakasz. Lehet, hogy innen származik az elnevezés? Fontos és érdekes, hogy ennek a régi középnek a tulajdonságait, alkalmazásának lehetőségeit Hargitai Sára gödöllői középiskolás tanuló vizsgálta, eredményeit több helyen ismertette (KöMaL, matematika tanárklub).

III. Néhány feladat az $n=2$ és $n=3$ esethez

Először is adjunk egy bizonyítást a közepek közötti kapcsolatra n=3 esetén. Az ismert Cauchy-féle indukciós módszer helyett most egy tisztán algebrai átalakításon alapulóutat követünk. Vegyük a háromtagú $(a+b+c)^3$ kifejtését:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)^3-3ab(a+b+c)-3bc(a+b+c)-3ca(a+b+c),$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

Az $a,\ b,\ c$ pozitív számok, tehát a jobb oldal mindenképpen nagyobb vagy egyenlő, mint nulla. Egyenlőség csak abban az esetben, ha $a=b=c$. Azt kaptuk, hogy

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc \iff \frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq abc.$$

Ez pedig $x=a^3,\ y=b^3,\ z=c^3$ helyettesítéssel éppen a számtani és mértani közé közötti egyenlőtlenséget adja. Beláttuk, hogy egyenlőség kizárólag abban az esetben, ha mindegyik szám egyenlő.

Ha a számtani mértani-közép között most bizonyított egyenlőtlenséget az $\frac{1}{x},\ \frac{1}{y},\ \frac{1}{z}$ pozitív számokra alkalmazzuk, akkor éppen a harmonikus- és mértani közép közötti egyenlőtlenséget kapjuk. Ez kicsit részletesebben: az előbb bizonyított reláció alapján

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}=\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Mindkét oldal reciprokát véve az egyenlőtlenség iránya megfordul és épp a bizonyítandó állítás adódik.

$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\leq\sqrt[3]{xyz}.$$

A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség bizonyításához felhasználjuk, hogy két pozitív számra igaz az egyenlőtlenség:

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow (a+b)^2 \le 2a^2+2b^2.$$

Legyen a harmadik pozitív szám c és induljunk ki az $(a-c)^2 \ge 0,\ (b-c)^2 \ge 0$ egyenlőtlenségekből.

Kifejtés és rendezés után adjuk össze ezt a két igaz egyenlőtlenséget:

$$2ac \le a^2+c^2,\ 2bc \le b^2+c^2 \Rightarrow 2c(a+b) \le 2c^2+a^2+b^2.$$

Most adjunk mindkét oldalhoz $c^2+(a+b)^2$-t, ezzel a bal oldalon teljes négyzetet kapunk:

$$c^2+2c(a+b)+(a+b)^2 \le 3c^2+a^2+b^2+(a+b)^2.$$

Végül a jobb oldalon használjuk fel a két számra már bizonyított számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség fentebbi alakját:

$$c^2+2c(a+b)+(a+b)^2 = (a+b+c)^2 \le 3c^2+a^2+b^2+(a+b)^2 \le 3c^2+a^2+b^2+2a^2+2b^2.$$

Innen azonnal adódik, hogy

$$(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{9} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Egyenlőség az első lépésnél akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=c$ és $b=c$, továbbá az $(a+b)^2$ felső becslésénél, ha $a=b$. Ezzel beláttuk mindegyik egyenlőtlenséget $n=3$ esetén.

Most nézzünk néhány jellemző feladatot ezek lehetséges alkalmazásaira.

4. Legyenek $a,\ b,\ c$ pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$a^3+b^3+c^3 \ge a^2b+b^2c+c^2a.$$

Mikor teljesül az egyenlőség?

Megoldás:

A megoldási módszer lényege, hogy szimmetrikusan vesszük három szám számtani és mértani közepét úgy, hogy két-két szám minden esetben megegyező.

$$\frac{a^3+a^3+b^3}{3} \ge \sqrt[3]{a^3a^3b^3} = a^2b, \qquad \frac{b^3+b^3+c^3}{3} \ge \sqrt[3]{b^3b^3c^3} = b^2c, \qquad \frac{c^3+c^3+a^3}{3} \ge c^2a.$$

Ha ezt a három egyenlőtlenséget összeadjuk, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

$$\frac{a^3+a^3+b^3}{3}+\frac{b^3+b^3+c^3}{3}+\frac{c^3+c^3+a^3}{3}\geq a^2b+b^2c+c^2a,$$

$$a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha mindegyik számtani-mértani középnél egyenlőség van, azaz $a=b=c$. Erre a feladatra gyors megoldás adható a rendezési tétellel is az előadáson ott szerepelt első alkalmazás lépéseit követve.

5. Legyenek $a,\ b,\ c$ és d pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Mikor teljesül az egyenlőség?

Megoldás:

A megoldáshoz három lépésben alkalmazzuk az $n=2$ esetre vonatkozó számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget. Idézzük fel ezt az egyenlőtlenséget és írjuk át egy használható alakra!

$\dfrac{a+b}{2}\geq\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\Leftrightarrow(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$. Egyenlőség továbbra is csak $a=b$ esetén.

Ezt felhasználva három lépésben becsüljük meg az egyenlőtlenség bal oldalát:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{4}{a+b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}=4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{16}{d}\geq\frac{16}{a+b+c}+\frac{16}{d}\geq16\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{d}\right)\geq\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Az egyenlőséghez: $a=b,\ a+b=c,\ a+b+c=d$ tartozik, ahonnan $a=b,\ c=2a,\ d=4a.$

6. Az $a,\ b,\ c$ pozitív valós számok összege 1. Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt{3a+2}+\sqrt{3b+2}+\sqrt{3c+2}<6.$$

Mennyi a pontos felső korlát?

Megoldás: Az ilyen jellegű feladatok esetében azért nem szerepel sokszor a pontos felső korlát, mert az utalna/utalhatna az ötletre, amivel megoldható. Látható, hogy a négyzetgyökjel alatti számok összege egy állandó érték, így célszerű olyan közepet választani, ahol a négyzetek szerepelnek. Ez a kvadratikus közép. Becsüljük meg a baloldali kifejezést felülről a kvadratikus közép segítségével:

$$\frac{\sqrt{3a+2}+\sqrt{3b+2}+\sqrt{3c+2}}{3} \le \sqrt{\frac{3a+2+3b+2+3c+2}{3}} = \sqrt{\frac{3(a+b+c)+6}{3}} = \sqrt{3}.$$

A pontos felső becslés, beszorzással $3\sqrt{3}$. Ezt akkor veszi a fel a kifejezés, amikor a három szám megegyezik $a = b = c = \frac{1}{3}$. Láthatóan $3\sqrt{3} < 6$, mert $\sqrt{3} < 2$.

7. Oldja meg az egyenletet a valós számok lehetséges legbővebb részhalmazán.

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x} = y+\frac{9}{y}.$$

Megoldás: A bal oldalon a négyzetgyökjelek alatt nemnegatív számoknak kell állniuk, innen azonnal adódik, hogy $-7 \le x \le 11$. A jobb oldali kifejezés sem negatív, sőt a nevező miatt nulla sem, tehát $y > 0$. Az egyenletet az értékkészlet vizsgálatán alapuló módszerrel oldjuk meg.

A két gyök összegét felülről becsüljük meg a kvadratikus középpel.

$$\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}}{2} \le \sqrt{\frac{x+7+11-x}{2}} = 3. \Rightarrow \sqrt{x+7}+\sqrt{11-x} \le 6.$$

A jobb oldali kifejezés alulról becsülhető a mértani középpel:

$$\frac{y+\frac{9}{y}}{2} \ge \sqrt{y\cdot\frac{9}{y}} = 3 \Rightarrow y+\frac{9}{y} \ge 6.$$

A két becslés összevetéséből csak akkor kapunk megoldást, ha mindkét egyenlőtlenség az egyenlőséggel teljesül.

$$x+7 = 11-x \Leftrightarrow x = 2, \qquad y = \frac{9}{y} \Rightarrow y = 3.$$

8. Az a és b pozitív valós számok összege 1. Mutassuk meg, hogy

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \ge 9.$$

Megoldás: Az egyenlőtlenség bal oldalát alakítjuk. A beszorzás után a nevezőben a szorzatot a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján nagyobbra cseréljük, ezzel az összeget alulról becsüljük.

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} = 1+\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab} = 1+\frac{2}{ab} \ge 1+\frac{2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = 1+8 = 9.$$

Egyenlőség $a = b = \frac{1}{2}$ esetén. A feladat n-változóra is ismert: ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok összege 1, akkor $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n$,

9. Legyenek a, b és c pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq (a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Megoldás: Többször alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az a^3, b^3, c^3 számokra különféle csoportosításban. Az egyszerűség kedvéért a köbgyökvonást és a 3-mal történő szorzást követő formában írjuk le ezeket:

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc,\ a^3+b^3+c^3 \geq 3abc,\ a^3+b^3+c^3 \geq 3abc,$$
$$a^3+a^3+b^3 \geq 3a^2b,\ b^3+b^3+c^3 \geq 3b^2c,\ a^3+c^3+c^3 \geq 3c^2a,$$
$$a^3+b^3+b^3 \geq 3ab^2,\ b^3+c^3+c^3 \geq 3bc^2,\ a^3+a^3+c^3 \geq 3ca^2.$$

A kilenc egyenlőtlenséget összeadva:

$$9\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq 3(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Hárommal osztás után a bizonyítandót kapjuk. Egyenlőség mindegyiknél. $a=b=c$ esetén.

10. Legyenek a és b egynél nagyobb valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1} \geq 8.$$

Mikor teljesül egyenlőség?

Megoldás: Vezessünk be új ismeretleneket! legyen $\boldsymbol{a-1=x}$, $\boldsymbol{b-1=y}$, a feltétel alapján ezek továbbra is pozitív számok. Alkalmazásukkal az egyenlőtlenség bal oldala kényelmesebben lesz becsülhető. Kényelmi szempontból a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget $\boldsymbol{u+v \geq 2\sqrt{uv}}$ alakban írjuk fel:

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}=\frac{(x+1)^2}{y}+\frac{(y+1)^2}{x}=\frac{x^2}{y}+\frac{1}{y}+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x}+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}+4\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+2\sqrt{\frac{y^2}{x^2}} \geq$$

$$\geq 2\frac{x}{y}+4+2\frac{y}{x}=2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4 \geq 4\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+4=8.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $x = y$, és $\frac{x^2}{y} = \frac{1}{y}$, azaz ha $a = b = 2$. Ez a feladat alkalmas több jó „fogás" gyakorlására, pl. alkalmas helyettesítés, pozitív szám és reciproka együtt legalább 2.

Rövidíthető a megoldás, ha felhasználjuk, hogy $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 2x \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 4x$.

$$\frac{(x+1)^2}{y} + \frac{(y+1)^2}{x} \geq \frac{4x}{y} + \frac{4y}{x} = 4\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 8.$$

Egyenlőség itt azonnal $x = y = 1$, azaz $a = b = 2$ esetén.

11. Az a, b, c nemnegatív számokra $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Bizonyítandó, hogy

$$a(b+c) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mikor teljesül egyenlőség?

Megoldás: A számtani-mértani közép közötti becslést fogjuk használni a feltételt két részre bontva:

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{a^2}{2} + b^2\right) + \left(\frac{a^2}{2} + c^2\right) \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{2}b^2} + 2\sqrt{\frac{a^2}{2}c^2} = \sqrt{2}(ab+ac).$$

Az első és az utolsó összehasonlításából, $\sqrt{2}$-vel osztás után:

$$a(b+c) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Egyenlőség $\frac{a^2}{2} = b^2 = c^2$ esetén, ahonnan $4b^2 = 1$, $b = c = \frac{1}{2}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ez a feladat arra is példa, hogy nem minden esetben a teljesen szimmetrikus helyzetben kapjuk a szélsőértéket.

IV. Néhány szélsőérték-feladat

12. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ függvény minimumát és maximumát az

$1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ feltétel fennállása esetén. Mik a szélsőértékhelyek?

Megoldás:

Itt nem ismerjük a változók előjelét, így csak annyit tudunk biztosan, hogy $2|xy| \leq x^2 + y^2$. A változók előjelét figyelembe véve ez azt jelenti, hogy

$$-\frac{x^2+y^2}{2} \le xy \le \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Egyenlőség az első esetben $x = -y$, a másodikban $x = y$. A feltétel alapján $\frac{1}{2} \le \frac{x^2+y^2}{2} \le 1$, így

$$\frac{1}{2} \le x^2+y^2-\frac{x^2+y^2}{2} \le x^2+xy+y^2 \le x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2} \le 3.$$

A maximumot akkor veszi fel, ha $x = y = 1$, vagy $x = y = -1$.

A minimumnál $x = -y$ és $x^2+y^2=1$ alapján $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, vagy $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. Egységnyi térfogatú, felül nyitott hengerek közül melyiknek legkisebb a felszíne?

Megoldás: A szokásos jelölésekkel írjuk fel a térfogatot és a felszínt.

$$V = r^2\pi m, \qquad A = r^2\pi + 2r\pi m.$$

A térfogatból kifejezzük a magasságot és beírjuk a felszín képletébe:

$$m=\frac{V}{r^2\pi} \Rightarrow A = r^2\pi + 2r\pi\frac{V}{r^2\pi} = r^2\pi+\frac{2V}{r} = r^2\pi+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}.$$

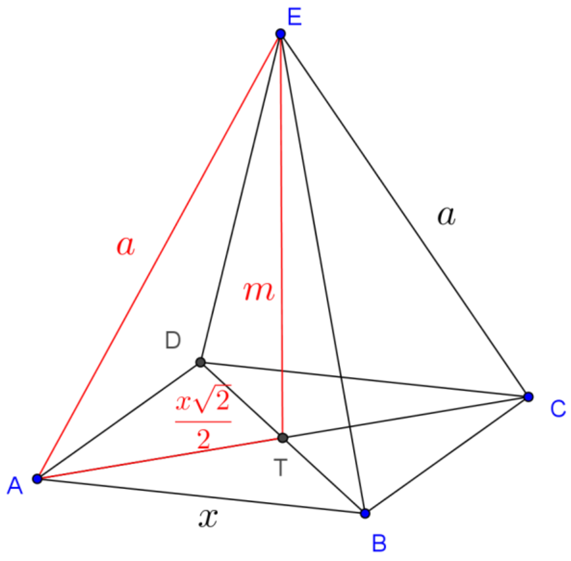
A három szám összege nagyobb vagy egyenlő, mint a három szám mértani közepének háromszorosa:

$r^2\pi+\frac{V}{r}+\frac{V}{r} \ge 3\sqrt[3]{r^2\pi\frac{V}{r}\frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{V^2\pi}$, ami független a sugár és a magasság választásától.

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $r^2\pi=\frac{V}{r} \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, továbbá ezt az r értéket behelyettesítve a magasság $m=\frac{V}{r^2\pi}=\sqrt[3]{\frac{V^3\pi^2}{V^2\pi^3}}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}=r$. A minimális felszínű, felül nyitott henger olyan alakú, mint a hagyományos készétel konzervek dobozai a fedelük nélkül.

14. Azok közül a szabályos négyoldalú gúlák közül, amelyeknek mindegyik oldaléle *a* hosszúságú, melyiknek legnagyobb a térfogata?

Megoldás: Legyen a gúla alapéle *x*, magassága *m* az ábra szerint.



Fontos ötlet és nagyon sok esetben kényelmesebbé teszi a számításokat, ha az eredeti pozitív mennyiség helyett négyzetének szélsőértékét vizsgáljuk. Pozitív számokról lévén szó ez a végeredményt nem befolyásolja.

Pitagorasz tétele alapján $m^2 = a^2 - \frac{x^2}{2}$. Ezt írjuk be a térfogat négyzetének képletébe:

$$V^2 = \frac{x^4 m^2}{9} = \frac{x^4}{9}\left(a^2 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{16}{9} \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \frac{x^2}{4}\left(a^2 - \frac{x^2}{2}\right).$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$V^2 \le \frac{16}{9}\left(\frac{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + a^2 - \frac{x^2}{2}}{3}\right)^3 = \frac{16}{9} \cdot \frac{a^6}{27} \Rightarrow V \le \frac{4 \cdot a^3}{9\sqrt{3}},\ m_0 = \frac{a}{\sqrt{3}},\ x_0 = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

A maximális térfogathoz tartozó gúla magassága fele az alapélnek. Ez eléggé meglepő, szokatlan eredmény.

A következő feladat jóval nehezebb, viszont rávilágít arra, hogy az analízis eszközei nélkül is ügyesen megoldhatók hasonló feltételes szélsőérték-feladatok is. Igaz, hogy itt a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget $n = 5$-re használjuk.

15. Az a, b, c nemnegatív számokra $a + b + c = \sqrt{5}$. Adjuk meg a következő szorzat legnagyobb lehetséges értékét.

$$\left(a^2 - b^2\right)\left(b^2 - c^2\right)\left(c^2 - a^2\right)$$

Megoldás: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \le b \le c$. Emiatt

$$\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)=\left(b^2-a^2\right)\left(c^2-a^2\right)\left(c^2-b^2\right)\le b^2c^2\left(c^2-b^2\right).$$

A számok nem negatívak így biztosan $b+c \le \sqrt{5}$.

A megoldás ötlete az együtthatók kiegyensúlyozása. Ez részletesebben azt jelenti, hogy ha pl. a b-t pozitív x-szel, a c-t pozitív y-nal bővítjük úgy, hogy $xy = 1$, akkor a teljes szorzat nem változik, viszont ügyes választással elérhetjük, hogy a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásakor eltűnjön a $\left(c-b\right)$ miatt fellépő eltérés a szimmetrikus helyzettől.

$$b^2c^2\left(c^2-b^2\right)=(c+b)(xb)^2(yc)^2(c-b)\le(c+b)\left(\frac{2xb+2yc+c-b}{5}\right)^5.$$

Akkor kapunk szimmetrikus eredményt, ha

$$\begin{cases} xy=1 \\ 2x-1=2y+1. \end{cases}$$

A második egyenletből $x=y+1$, és ezzel az első egyenletből $y^2+y-1=0$.

Ennek pozitív megoldása $y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, és $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Írjuk vissza a kiegyensúlyozás eredményét a felső becslésbe:

$$(c+b)\left(\frac{2xb+2yc+c-b}{5}\right)^5=\left(b+c\right)\left(\frac{\sqrt{5}\left(b+c\right)}{5}\right)^5\le\sqrt{5}.$$

A maximumot meg is kapjuk, ha $a=0$, $b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $c=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, illetve a megoldás elején tett megjegyzés szerint ezek az eredmények tetszőlegesen permutálhatóak a; b; c között.

16. Vizsgáljuk elemi eszközeinkkel az $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ függvény lehetséges szélsőérték-helyeit és szélsőértékeit.

Megoldás (vázlat): Alkalmazzunk először $x = y - \frac{a}{3}$ helyettesítést, így megszabadulunk a másodfokú tagtól. Ez a helyettesítés x-tengellyel párhuzamos eltolást jelent.

$$f(y)=\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=y^3+\left(-\frac{a^2}{3}+b\right)y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right).$$

$$f(y)=y^3-py+q.$$

Elegendő az $f(y)=y^3-py$ függvényt vizsgálnunk és csak pozitív y számokra, mert páratlan a függvény.

Ha $p<0$, akkor a függvény szigorúan monoton növekedő.

Ha $p>0$, akkor a függvénynek $y=0$ és $y=\sqrt{p}$ zérushelyei. E két hely között van minimumhelye. A $]0,\sqrt{p}[$ nyílt intervallumban a $-f(y)=y(p-y^2)$ pozitív, vizsgálhatjuk négyzetének is a maximumát:

$$y^2\left(p-y^2\right)^2=\frac{1}{2}\left(2y^2\right)\left(p-y^2\right)^2\le\frac{1}{2}\left(\frac{2p}{3}\right)^3,\Rightarrow y^2=\frac{p}{3},\Rightarrow y=\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

A minimumhelyet és értéket a megfelelő értékek visszahelyettesítésével megkapjuk.

V. A rendezési tétel és alkalmazásai

Az egyenlőtlenségek bizonyítási módszerei között egyszerűen megérthető, bizonyítható eszközünk lehet a rendezési tétel. A megértése, indoklása minimális algebrai ismereteket igényel. Kis gyakorlással nagyon sok feladat elegánsan oldható meg a rendezési tétellel. Az alkalmazások előtt kimondjuk és be is bizonyítjuk a tételt. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1 b_2, \ldots, b_n$ szám n-esek *azonosan rendezettek*, ha bármely $a_i \le a_j$ esetén teljesül, hogy $b_i \le b_j$. Ezzel szemben az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1 b_2, \ldots, b_n$ szám n-esek *ellentétesen rendezettek*, ha $a_i \le a_j$ esetén teljesül, hogy $b_i \ge b_j$.

Tétel (rendezési tétel): Legyen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $(b_1 b_2, \ldots, b_n)$ két valós szám n-es, továbbá $p_1, p_2 \ldots, p_n$ egy permutációja a $b_1 b_2, \ldots, b_n$ számoknak. Az $a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \ldots + a_n \cdot p_n$ összeg akkor maximális (minimális), ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $p_1, p_2 \ldots, p_n$ azonosan (ellentétesen) rendezettek.

Bizonyítás (vázlat): Legyen $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ és $\boldsymbol{b_1 b_2, \ldots, b_n}$ két nem azonosan rendezett szám n-es. Tehát van olyan $\boldsymbol{i<k}$, hogy $\boldsymbol{a_i \le a_k}$, és $\boldsymbol{b_i > b_k}$. Ha most a teljes szorzatösszegben ezt a két párosítást megváltoztatjuk, akkor elegendő vizsgálni, hogy e két párosítás közül melyik adja a nagyobb összeget

$$\boldsymbol{a_i \cdot b_i + a_k \cdot b_k} \text{ vagy } \boldsymbol{a_i \cdot b_k + a_k \cdot b_i}?$$

A zárójelek felbontása és rendezés után:

$$(a_k-a_i)(b_i-b_k)\ge 0, \text{ így } a_i \cdot b_k + a_k \cdot b_i \ge a_i \cdot b_i + a_k \cdot b_k.$$

Mindaddig végezhetjük ezt a lépést, amíg találunk nem megfelelő párokat. Véges sok lépésben el tudjuk érni a maximumot és a minimumot is. Ez bizonyítja a tételt.

Az egyenlőséghez az szükséges, hogy mindegyik csere esetében legalább az egyik különbségnél nulla szerepeljen, egyenlőség legyen.

Az alkalmazások során látható lesz, hogy milyen hatékony ez az eszköz.

17. Legyenek az a, b, c pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$a^6 + b^6 + c^6 \geq a^5 b + b^5 c + c^5 a.$$

Mi az egyenlőség feltétele?

Megoldás: Most két számhármasról van szó. Az egyik az $\boldsymbol{a^5, b^5, c^5}$ a másik pedig az $\boldsymbol{a, b,\ c}$.

Akármilyenek is az $a, b,\ c$ közötti nagyságbeli viszonyok, biztos, hogy az azonosan rendezés $a^5 \cdot a + b^5 \cdot b + c^5 \cdot c$ nagyobb vagy egyenlő, mint bámely másik rendezés, ez bizonyítja az állítás első részét.

$$a^5 \cdot a + b^5 \cdot b + c^5 \cdot c \geq a^5 \cdot b + b^5 \cdot c + c^5 \cdot a.$$

Az egyenlőséghez vizsgáljuk a „cseréket!

$$a^5 \cdot a + b^5 \cdot b + c^5 \cdot c \to a^5 \cdot b + b^5 \cdot a + c^5 \cdot c \to a^5 \cdot b + b^5 \cdot c + c^5 \cdot a$$

Mindkét cserénél vagy két ötödik hatványnak, vagy két számnak kell egyenlőnek lennie. Az elsőnél ebből az $a = b,$ a másodiknál $a = c$, vagy $b = c$ következik. Egyenlőség tehát akkor és csak akkor, ha $a = b = c.$

18. Legyenek az a, b, c pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$ab^5 + bc^5 + ca^5 \geq abc\left(a^2 b + b^2 c + c^2 a\right).$$

Megoldás: Először is osszuk el a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $\boldsymbol{abc}$-vel.

$$\frac{a^4}{b} + \frac{b^4}{c} + \frac{c^4}{a} \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

Elegendő ezt bizonyítani. Itt nem ismerjük a változók sorrendjét, így csak annyit tudunk biztosan, hogy az a^4, b^4, c^4 és $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ számhármasok *ellentétesen* rendezettek. A rendezési tétel alapján viszont bizonyos, hogy ekkor

$$a^4 \cdot \frac{1}{b} + b^4 \cdot \frac{1}{c} + c^4 \cdot \frac{1}{a} \geq a^4 \cdot \frac{1}{a} + b^4 \cdot \frac{1}{b} + c^4 \cdot \frac{1}{c} = a^3 + b^3 + c^3.$$

Másrészt az a^2, b^2, c^2 és $a,\ b,\ c$ számhármasok biztosan *azonosan* rendezettek, tehát

$$a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c \geq a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a.$$

Egyenlőség mindkét becslésnél akkor és csak akkor, ha a számok mind egyenlők.

19. Legyenek az a, b, c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Mi az egyenlőség feltétele?

Megoldás: Most is két számhármasról van szó. Indulásnál a logikai szimmetria segítségünkre van.

FONTOS! Bármely két betű cseréjére az állítás változatlan, tehát feltehetjük, hogy $a \leq b \leq c$.

Emiatt $a+b \leq c+a \leq b+c$ és $\frac{1}{b+c}\leq\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{a+b}$ is teljesül. Alkalmazzuk kétszer is a rendezési tételt:

$$a\cdot\frac{1}{b+c}+b\cdot\frac{1}{c+a}+c\cdot\frac{1}{a+b}\geq a\cdot\frac{1}{a+b}+b\cdot\frac{1}{b+c}+c\cdot\frac{1}{c+a},$$

$$a\cdot\frac{1}{b+c}+b\cdot\frac{1}{c+a}+c\cdot\frac{1}{a+b}\geq b\cdot\frac{1}{a+b}+c\cdot\frac{1}{b+c}+a\cdot\frac{1}{c+a}.$$

A két egyenlőtlenséget összeadva:

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\geq\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}=3.$$

Kettővel osztva a bizonyítandót kapjuk. Egyenlőség akkor és csak a akkor, ha a cseréknél vagy két szám, vagy két összeg egyenlő, azaz mindhárom egyenlő.

Ez a nevezetes Nesbitt-egyenlőtlenség.

20. Mutassuk meg, hogy a, b, c tetszőleges pozitív számokra teljesül

$$\frac{a}{b^2+bc}+\frac{b}{c^2+ca}+\frac{c}{a^2+ab}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

Megoldás: A megoldáshoz a rendezési tételt használjuk. Ehhez két számhármast hasonlítunk össze. Nevezetesen azt állítjuk, hogy az $\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}$ és $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ számhármasok ellentétesen rendezettek. Vigyázat! Nem tehettünk fel a számok között önkényesen egy sorrendet, mert két betű cseréjére megváltozna a bizonyítandó állítás! Ettől függetlenül meg tudjuk mutatni, hogy a két számhármas mindenképpen ellentétesen rendezett. Legyen például

$$\frac{a}{b+c}>\frac{b}{c+a}.$$

Ekvivalens átalakításokkal:

$$a^2+ac>b^2+bc,$$

$$a^2-b^2+ac-bc>0,$$

$$(a-b)(a+b)+c(a-b)>0,$$

$$a>b \Leftrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$$

A másik két pár esetén ugyanígy bizonyítható az ellentétes rendezettség.

Most könnyedén tudjuk befejezni a bizonyítást az ellentétes rendezésnél mindegyik párosítás nagyobb vagy egyenlő, tehát

$$\frac{a}{b+c}\cdot\frac{1}{a}+\frac{b}{c+a}\cdot\frac{1}{b}+\frac{c}{a+b}\cdot\frac{1}{c}\le\frac{a}{b+c}\cdot\frac{1}{b}+\frac{b}{c+a}\cdot\frac{1}{c}+\frac{c}{a+b}\cdot\frac{1}{a},$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\le\frac{a}{b^2+bc}+\frac{b}{c^2+ac}+\frac{c}{a^2+ab}.$$

Egyenlőség kizárólag $a=b=c$ esetén.

21. Az a, b, c pozitív számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}.$$

Megoldás: Az egyenlőtlenség a betűk felcserélése esetén nem változik. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a\le b\le c.$ Ennek megfelelően további sorrendek is azonnal adódnak:

$a+b\le c+a\le b+c,\quad \frac{1}{c}\le\frac{1}{b}\le\frac{1}{a},\quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$ és végül $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}\le\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$

Az utolsó más formában írva már mutatja, hogy hogyan használhatjuk fel a bizonyításnál:

$\frac{ab}{a+b}\le\frac{ca}{a+c}\le\frac{bc}{b+c}.$ A továbbiakban azt fogjuk felhasználni, hogy az

$a+b, c+a, b+c$ és $\frac{ab}{a+b}, \frac{ca}{a+c}, \frac{bc}{b+c}$ számhármasok azonosan rendezettek. A következő három sor közül az első egyértelmű azonosság, a másik kettő pedig a rendezési tétel közvetlen használata:

$$\frac{ab}{a+b}(a+b)+\frac{ca}{c+a}(c+a)+\frac{bc}{b+c}(b+c)=\frac{ab}{a+b}(a+b)+\frac{ca}{c+a}(c+a)+\frac{bc}{b+c}(b+c),$$

$$\frac{ab}{a+b}(c+a)+\frac{ca}{c+a}(b+c)+\frac{bc}{b+c}(a+b)\le\frac{ab}{a+b}(a+b)+\frac{ca}{c+a}(c+a)+\frac{bc}{b+c}(b+c),$$

$$\frac{ab}{a+b}(b+c)+\frac{ca}{c+a}(a+b)+\frac{bc}{b+c}(c+a)\le\frac{ab}{a+b}(a+b)+\frac{ca}{c+a}(c+a)+\frac{bc}{b+c}(b+c).$$

A három egyenlőtlenséget összeadva, a kiemelések után, továbbá a jobb oldalon elvégezve az egyszerűsítéseket:

$$2(a+b+c)\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)\leq 3(ab+bc+ca).$$

Mindkét oldalt osztva a pozitív $2(a+b+c)$ -vel éppen a bizonyítandó állítást kapjuk. Egyenlőség már a közbeeső lépések esetén is csak abban az esetben, ha $a=b=c$. A megoldás során többször is felhasználtuk a rendezési tételt. Ez valójában a szintén nevezetes Csebisev-egyenlőtlenség, de ennek részletes bizonyítását így elhagyhattuk.

VI. A Titu-lemma és alkalmazási lehetőségei

Először érdemes csak egy speciális esettel foglalkoznunk kitűzött feladatként.

22. Legyenek x és y tetszőleges valós számok, az a és b pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}.$$

Milyen esetben teljesül az egyenlőség?

Megoldás: Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $\boldsymbol{ab(a+b)}$ számmal.

$$b(a+b)x^2+a(a+b)y^2\geq ab(x+y)^2,$$
$$abx^2+b^2x^2+a^2y^2+aby^2\geq abx^2+2abxy+aby^2,$$
$$a^2y^2-2abxy+a^2y^2\geq 0.$$

Ekvivalens átalakítások után kaptunk egy teljes négyzetet: $(ay-bx)^2\geq 0,$ tehát igaz az állítás.

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $\frac{x}{a}=\frac{b}{y}$.

Most következzen az általános eset!

23. (Tétel: Titu-lemma): Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tetszőleges valós számok, az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pedig pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{a_n}\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Milyen esetben teljesül az egyenlőség?

Megoldás: $\boldsymbol{n}$-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

Az előzőekben $\boldsymbol{n=2}$-re már igazoltuk az állítást. Most tegyük fel, hogy $\boldsymbol{n=k}$-ig már igazoltuk és legyen $\boldsymbol{n=k+1}$. Fel fogjuk használni az indukciós feltevést.

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\ldots+\frac{x_k^2}{a_k}+\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} \geq \frac{\left(x_1+x_2+\ldots+x_k\right)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_k}+\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} \geq \frac{\left(x_1+x_2+\ldots+x_k+x_{k+1}\right)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}}.$$

Itt $n=k$ esetét használjuk, itt $n=2$ esetét.

Egyenlőség az indukciós feltevés felhasználásával $\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_n}{a_n}$ esetén.

Először három fentebb már szerepelt feladatra adjunk újabb megoldást a Titu-lemmával.

24. (Fentebb 5. feladat) Legyenek $a,\ b,\ c$ és d pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Mikor teljesül az egyenlőség?

Megoldás: Vegyük észre, hogy a bal oldalon a számlálóban négyzetek vannak és így azonnal alkalmazható a Titu-lemma:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}=\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d} \geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}=\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{2}{c}=\frac{4}{d} \iff d=4a,\ c=2a,\ b=a.$$

25. (Fentebb 10. feladat) Legyenek a és b egynél nagyobb valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1} \geq 8.$$

Mikor teljesül egyenlőség?

Megoldás: A $(b-1)$ és az $(a-1)$ pozitív számok, így azonnal alkalmazható alsó becslésre a Titu-lemma.

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1} \geq \frac{(a+b)^2}{a+b-2}.$$

Erről kell belátni, hogy nagyobb vagy egyenlő, mint 8. Rendezzük át ekvivalens átalakításokkal a bizonyítandó állítást:

$$\frac{(a+b)^2}{a+b-2} \geq 8 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 8(a+b)-16 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 8(a+b)+16.$$

Ez pedig $(a+b-4)^2 \geq 0$, azonosan igaz egyenlőtlenség. Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a+b=4$ és $a=b$, vagyis $a=b=2$ esetén.

26. (Fentebb 19. feladat) Legyenek az a, b, c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Mi az egyenlőség feltétele?

Megoldás: Bővítsük a törteket rendre az $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ pozitív számokkal és alkalmazzuk a Titu-lemmát:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ca}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ca+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Az utóbbiról kell még belátni, hogy legalább $\frac{3}{2}$. Némi rendezés után:

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3ab+3bc+3ca,$$
$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0,$$
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$$

Ekvivalens lépéseket végeztünk. Egyenlőség $a=b=c$ esetén.

27. Legyenek a, b és c pozitív valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Megoldás: A Titu-lemma alkalmazása előtt érdekességként szeretnék megmutatni egy másik módszert, amelyet Csete Lajos, a győri Révai Gimnázium tanára alkalmazott sokféle feladatra, és az ötlet megszületésére utalva „komáromi trükk”-nek nevezett el.

Vegyük a következő párokra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}\cdot\frac{b+c}{4}}=2\cdot\frac{a}{2}=a,$$
$$\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c+a}\cdot\frac{c+a}{4}}=2\cdot\frac{b}{2}=b,$$
$$\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq 2\sqrt{\frac{c^2}{a+b}\cdot\frac{a+b}{4}}=2\cdot\frac{c}{2}=c.$$

Most adjuk össze a három egyenlőtlenséget és vonjunk ki mindkét oldalból $\frac{a+b+c}{2}$ -t.

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\geq a+b+c,$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

Most jöjjön a Titu-lemmával a gyors és elegáns megoldás:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}.$$

Az egyenlőség a Titu-lemma szerint akkor, ha $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$. Rövid számolással eljutunk az $a=b=c$ feltételhez. Pl.:

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}\Leftrightarrow ac+a^2=b^2+bc\Leftrightarrow a^2-b^2+ac-bc=0\Leftrightarrow(a-b)(a+b+c)=0.$$

Az $a,\ b,\ c$ pozitív számok, tehát ez csak $a=b$ esetén teljesül. Még egy pár összehasonlításával adódik, hogy mindhárom szám egyforma kell, hogy legyen.

28. Legyenek $a,\ b$ és c pozitív valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$

Megoldás: A feladat szokásos megoldása a számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenség közvetlen alkalmazása. Először ezt rögzítjük. Az $x,\ y,\ z$ pozitív számokra e két közép közötti összefüggés:

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}},$$ illetve kisebb átrendezéssel: $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}.$$

Legyen $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{b+c}{2}$, $z=\frac{c+a}{2}$. Helyettesítsük be ezeket az x, y, z helyére:

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\geq\frac{9}{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}}=\frac{9}{a+b+c}.$$

Az egyenlőség $x=y=z$, $a=b=c$ teljesülésekor.

Most pedig a meglepő és rövid megoldás. Bővítsük a bal oldali törteket 2-vel és alkalmazzuk a Titu-lemmát:

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}=\frac{4}{2(a+b)}+\frac{4}{2(b+c)}+\frac{4}{2(c+a)}\geq\frac{(2+2+2)^2}{4(a+b+c)}=\frac{9}{a+b+c}.$$

Egyenlőség $a=b=c$ esetén.

29. Teljesüljön az a, b és c pozitív valós számokra az $a+b+c=1$ feltétel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\geq\frac{9}{10}.$$

Megoldás: A már szokásosnak tekinthető módszerrel bővítsük a bal oldali törteket a számlálókkal és alkalmazzuk a Titu-lemmát:

$$\frac{a^2}{a+abc}+\frac{b^2}{b+abc}+\frac{c^2}{c+abc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc}=\frac{1}{1+3abc}.$$

A befejezéshez még adjunk felső becslést a három szám szorzatára a számtani-mértani közép segítségével:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow\frac{1}{27}\geq abc\Leftrightarrow\frac{1}{9}\geq 3abc.$$

Innen már adódik a befejezés a nevező felső becslésével.

$\frac{1}{1+3abc}\geq\frac{1}{1+\frac{1}{9}}=\frac{9}{10}$. A legutolsó lépésben egyenlőség kizárólag $a=b=c$ esetén.

30. Teljesüljön az a, b és c pozitív valós számokra az $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$. feltétel. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\geq\frac{1}{a+b+c}.$$

Megoldás: Ismét bővítsük a bal oldali törteket a számlálókkal és alkalmazzuk a Titu-lemmát:

$$\frac{a^2}{a^3-abc+a}+\frac{b^2}{b^3-abc+b}+\frac{c^2}{c^3-abc+c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc+(a+b+c)}.$$

Az előadáson is ismertetett algebrai azonosság szerint:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Helyettesítsük be ezt a nevezőbe és egyszerűsítsünk az $(a+b+c)$-vel.

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc+(a+b+c)}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+(a+b+c)}=$$
$$=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+1}.$$

Végül írjunk az 1 helyébe a feltétel alapján $3(ab+bc+ca)$-t. Ezzel azonnal látható, hogy a nevezőben ismét teljes négyzetet kapunk:

$$\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+1}=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=\frac{a+b+c}{(a+b+c)^2}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha a nevezőben $a^3+b^3+c^3=3abc.$

Ez pedig pontosan akkor, ha $a=b=c.$ Néhány éve a KöMaL-ban kitűzött feladat volt.

31. Legyenek $a,\ b,\ c$ olyan pozitív valós számok, amelyek szorzata 1. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Mikor teljesül a pontos egyenlőség?

Megoldás: Írjunk mindegyik számlálóban az 1 helyére $a^2b^2c^2$-et. Egyszerűsítés után alkalmazzuk a Titu-lemmát:

$$\frac{a^2b^2c^2}{a^3(b+c)}+\frac{a^2b^2c^2}{b^3(c+a)}+\frac{a^2b^2c^2}{c^3(a+b)}=\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{a^2c^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\geq\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Hiányzik még annak igazolása, hogy $ab+bc+ca\geq 3.$ Ez pedig azonnal következik a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenségből:

$$\frac{ab+bc+ca}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=1.$$

Ez a feladat az 1995. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia egyik feladata volt. ☺

VII. Javasolt irodalom:

- 1, Ábrahám Gábor: Nevezetes egyenlőtlenségek,
  MOZAIK Könyvkiadó, 1995.
- 2, Ábrahám Gábor: Egyenlőtlenségek I.-II.,
  ZALAMAT Alapítvány 2017.-2018.
- 3, Bartha Gábor – Kun Péter: Válogatott fejezetek a
  matematikából, Középiskolai szakköri füzetek,
  Tankönykiadó, 1986.
- 4, Hojoo Lee: Topics in inequalities
  https://www.isinj.com/mt-usamo/Topics%20in%20Inequalities%201st%20edition%20-%20Hojoo%20Lee%20(2007).pdf
- 5, Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása,
  TYPOTEX Kiadó, 1994.
- 6, Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből,
  TYPOTEX Kiadó, 2000.
- 7, Schultz János: 111 feladat algebrai egyenlőtlenségekre,
  matek.fazekas.hu