



PÁZMÁNY PÉTER KATOLIKUS EGYETEM
Információs Technológiai és Bionikai Kar



*Katolikus
Pedagógiai
Intézet*

Középiskolai matematikatanárok szaktárgyi továbbképzése

SEGÉDANYAGOK

2021. március 19.

Összeállította:

Dr. Dobos Sándor

Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

Hasonlóság és alkalmazásai

I. Bevezetés

A hasonlóság a klasszikus geometria egyik fejezete, tankönyvek és feladatgyűjtemények törzsanyagának része. Ebben az összeállításban azok számára szeretnénk segítséget nyújtani, akik:

- a tankönyvek által lefedett anyagban keresik a hangsúlyos részeket;
- feladatgyűjtemények bőséges kínálatából szeretnék látni egymásra épülő feladatsorokat;
- a tehetséggondozás, szakkörök anyagának lehetséges bővítésén, kiegészítésén munkálkodnak;
- kíváncsiak nehezebb feladatok megoldására, elemi hasonlósági észrevételek segítségével.

A feldolgozás során törekedni fogunk a fokozatosságra, azaz mindenhol szerepelni fognak bevezető, könnyebb feladatok. Ezeket a tapasztaltabb, rutinos tanárok régi ismerősként üdvözölhetik, számukra megerősítést jelenthetnek: „igen, én is ezeket viszem be az óráimra”, élményt adva. Igyekezni fogunk ezekre építve továbblépni a tananyagon túlmutató, kiegészítő területek felé és eljutni nehezebb feladatokhoz is. Remélem ilyen módon hasznos lesz az összeállítás a tanári pályáiv különböző fázisainál tartó kollegák, illetve az érdeklődő egyéb Olvasók számára is.

II. Fogalmak, tételek, szintek

A hasonlóság témakörét áttekintve ebben az összeállításban négy szintre osztjuk az anyagot.

Az első szint a hozott tudás átismétlése, a szükséges alapismeretek megszilárdítása, a biztos alapok szintje. Itt szerepel:

- a középpontos hasonlósági transzformáció;
- a háromszögek hasonlóságának alapesetei;
- a párhuzamos szelők tétele.

A középpontos hasonlósággal, a kicsinyítés-nagyítás jelenségével (akár szemléletes módon) mindenki találkozik, a fizikai környezetből szerzett tapasztalatokkal rendelkezik. A téma bevezetését a tanteremben mindig rajzolgatással, szerkesztéssel kezdem: A négyzetrácsos füzetbe rajzolt betűket egy adott pontból nagyítsuk háromszorosra, $\sqrt{2}$ -szeresre, $\frac{1}{2}$ -szeresre, $-3/2$ -szeresre. A gondosan megválasztott konkrét példák segítségével erősítjük azt, hogy minden 0-tól különböző valós számra elvégezhető a transzformáció.

A háromszögek hasonlóságának alapeseteit áttekintve építhetünk a már korábban tanult egybevágósági alapesetekre. A bizonyítások egyik lehetséges útja, hogy a háromszögek hasonlósági alapeseteire hivatkozunk később a tételek bizonyításánál.

A párhuzamos szelők tétele alapvető fontosságú. Hajós György: Bevezetés az elemi geometriába című könyvében ez a hasonlóság témakör első (és alapvető) tétele. A középiskolás korosztályból tapasztalatom szerint a tételbizonyítása során elég kevesen fogékonyak arra, hogy végigjárják az arány

egész-racionális-irracionális eseteire vonatkozó gondolatmeneteket, e helyett szemléletesen egyből hivatkoznak a háromszögek hasonlóságának alapeseteire, vagy területszámításos megfontolásokra.

A középszintű érettségihez és a feladatgyűjtemények bevezető feladataihoz ez a szint jelenti az alapot. A feladatanyagban később látunk majd olyat, ami ehhez a szinthez illeszkedik, mégis nehezebb.

A második csoportba olyan tételeket válogattam, amelyek még mindig nem lépnek jelentősen előre, alapórás csoporttal is kényelmesen áttekinthetők:

- d) szögfelező tétel;
- e) párhuzamos szelőszakaszok tétele;
- f) magasság és befogó tétel.

A szögfelező tétel bizonyításánál hivatkozhatunk a párhuzamos szelők tételére. A tétel alkalmazásával számolás feladatokat végezhetünk, képletet alkothatunk a szögfelező hosszára.

A párhuzamos szelőszakaszok tétele az egyik kedvencem, hiszen jó példája annak, hogy a tétel állítása igaz, a megfordítása viszont nem.

A magasság és befogó tétel bizonyításánál általában a háromszögek hasonlóságára hivatkozunk. Ez a két tétel kiindulópontja lehet a további hasonlóság segítségével elérhető eredményeknek: hasonló háromszögeket találunk – megfelelő aránypárokat írunk fel – keresztbe szorozva kapjuk a kívánt eredményeket.

A harmadik szint már inkább az emelt szintű csoportok anyagához tartozik, geometria iránt fogékony, érdeklődő szakkörösökkel is feldolgozható:

- g) külső szögfelező tétel; Apollóniusz kör;
- h) Ceva és Menelaosz tétel;
- i) pont körre vonatkozó hatványa, körök hatványvonala,
- j) Ptolemaiosz tétel.

A külső szögfelező tétel nem jelent nagy ugrást a szögfelező tételhez képest, viszont alapórába sok esetben a szűkös időkeretek miatt nem fér be. Innen viszont már csak egy lépés az Apollóniusz kör bevezetése, ami szerkesztéseknél, mértani helyes feladatoknál, később a körsorok bevezetésénél fontos lehet.

A Ceva és Menelaosz tétel sok feladat megoldásánál segítségünkre lehet, mindkettőhöz egyszerű hasonlóságot használó levezetéssel juthatunk. Ezen tételek természetes módon kínálják az osztóviszony bevezetését. Nagyon gyakori bizonyítási szituáció, hogy azt kell belátni: három egyenes egy ponton megy át, három pont egy egyenesen van. Az említett két tétel jó fegyver lehet az ilyen feladatoknál.

A pont körre vonatkozó hatványa olyan téma, ahol összeérnek a korábban tanult középponti-kerületi szögek, a hasonló háromszögek, a koordináta geometria, a szintetikus és az analitikus megközelítés. Versenyfeladatoknál gyakran jól használható eszköz és természetesen definiálja körök hatványvonalát.

A Ptolemaiosz tétel bizonyítása kicsit összetettebb, viszont látványos.

A negyedik szinthez osztottam azokat a tudnivalókat, amiket tehetséggondozó programokon, nagyobb óraszámú csoportokkal, speciális matematika tagozaton, versenyekre készülő diákokkal érdemes átvenni:

k) forgatványújtások;

l) Carnot tétel; Menelaosz tétel általánosítása;

m) Casey tétel.

A forgatványújtás nagyon természetesen adódó transzformáció. Rögtön az első szinten említettük a hasonló háromszögeket. Amennyiben ezek oldalai párhuzamosak, akkor középpontosan hasonlóak. Ha nem, de körüljárásuk megegyezik, akkor viszont van olyan pont, amely körül elforgatva, majd nagyítva egyik a másikba vihető. A diákok maguk kérdezik: hol van ez a pont, mekkora a szög, mekkora az arány?

A Ceva és a Menelaosz tétel egy-egy lehetséges általánosítása az l) pont. Az m) pontban szereplő Casey tétel pedig a Ptolemaiosz tétel egy továbbgondolása. Ezekhez az anyag végén találunk további iránymutatást, szakirodalmi hivatkozást, de jelen összeállításunkban arra törekedtünk, hogy ne használjunk semmi többet, mint amennyit az első szintből illetve továbbgondolásából megkaphatunk.

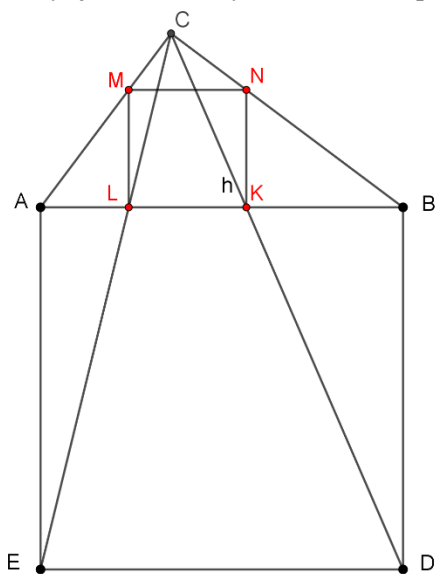
III. Feladatok

A Horvay Katalin és Reiman István által összeállított Geometria Feladatgyűjtemény első kötetében a hasonlóság témakörének első feladata az 1097-es, utolsó feladata az 1428-as. Ezzel a 232 feladattal nem lehet összemérni az alábbi válogatást, így tekintünk egyfajta szubjektív mazsoláztatásnak.

1. Az ABC háromszög oldalai $AB=5$, $BC=4$, $CA=3$. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek két csúcsa az AB oldalon van, egy-egy pedig a BC és CA oldalon. Állapítsuk meg a négyzet oldalának hosszát.

Megoldás:

Szerkesszünk az ABC háromszög AB oldalára kifelé egy $ABDE$ négyzetet. Ezt most C -ből kicsinyítjük. A kicsinyítés során A képe az AC , B képe a BC egyenesen mozog. D és E képe egyrészt



rajta van a CD és CE egyeneseken, másrészt AB -n. Jelöljük ezek metszéspontjait K és L betűkkel, innen a keresett $KLMN$ négyzet már könnyen megkapható, AB -re merőlegeseket állítunk K -ban és L -ben, ezek kimetszik a négyzet másik két csúcsát az ABC háromszög C -ből induló oldalaiból.

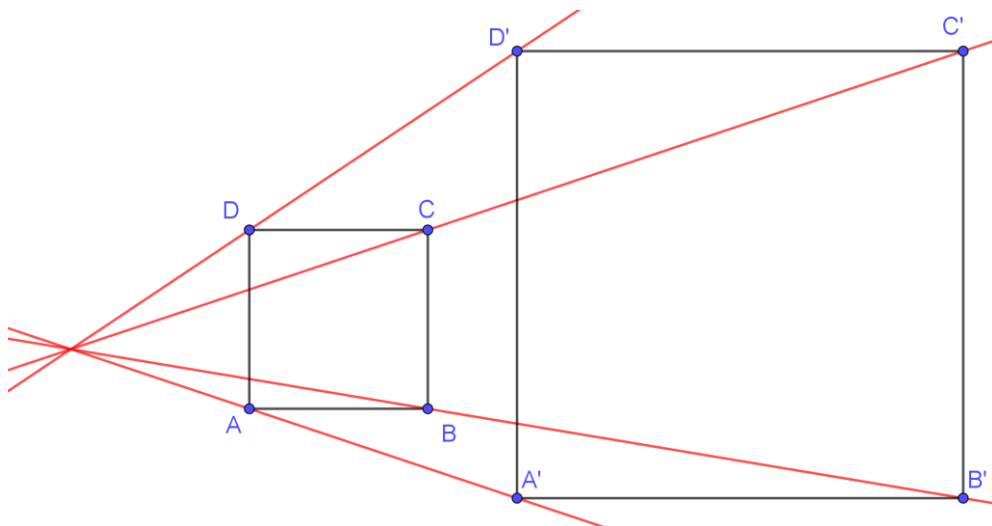
Most következzen a számolás. C távolsága AB -től $2,4$, az ABC háromszög derékszögű, így ez a magasság kényelmesen adódik. C távolsága az ED egyenestől pedig $5+2,4=7,4$. Így a kicsinyítés arányát megkaptuk és ebből a négyzet oldala azonnal számolható

$$KL = \frac{2,4}{7,4} \cdot 5 = \frac{60}{37}.$$

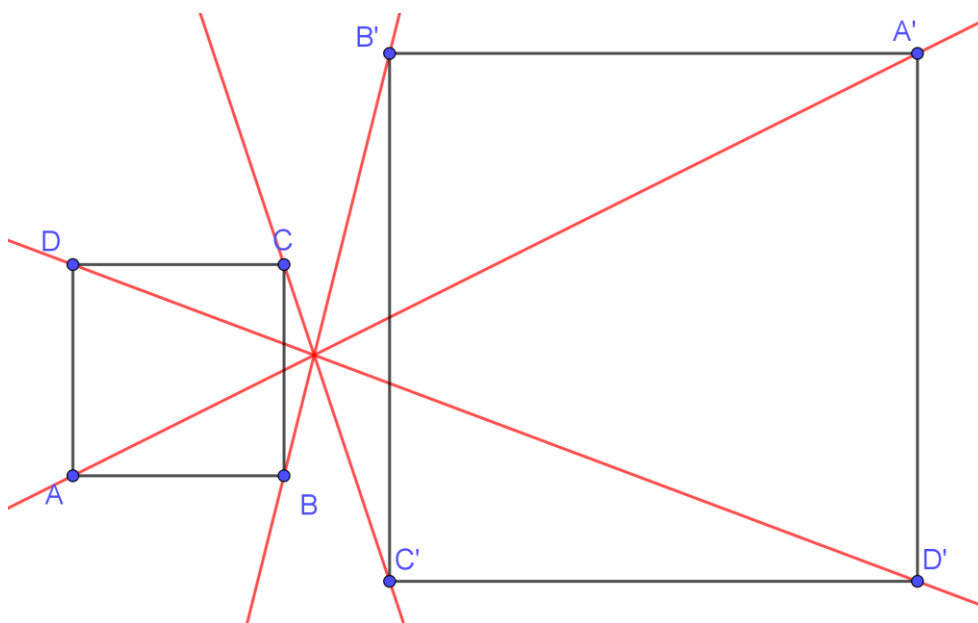
2. A négyzetrácson legyen A, B és A', B' olyan pontok, hogy az AB és $A'B'$ párhuzamosak és $AB \neq A'B'$. Megrajzoljuk az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyzeteket, amelyek azonos körüljárásúak. Igazoljuk, hogy az AA', BB', CC', DD' egyenesek egy ponton mennek át.

Megoldás:

Mivel az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ négyzetek hasonlóak és ráadásul megfelelő oldalaik párhuzamosak ezért középpontosan hasonlóak. A középpontos hasonlóság centrumán áthalad az összes olyan egyenes, amely egy pontot és a képét köti össze. A feladatban szereplő négy egyenes éppen ilyen. Érdekes megjegyezni, hogy kétféle lehetséges helyzet van.



Ábránkon az első esetben a hasonlóság aránya pozitív, a második esetben negatív.

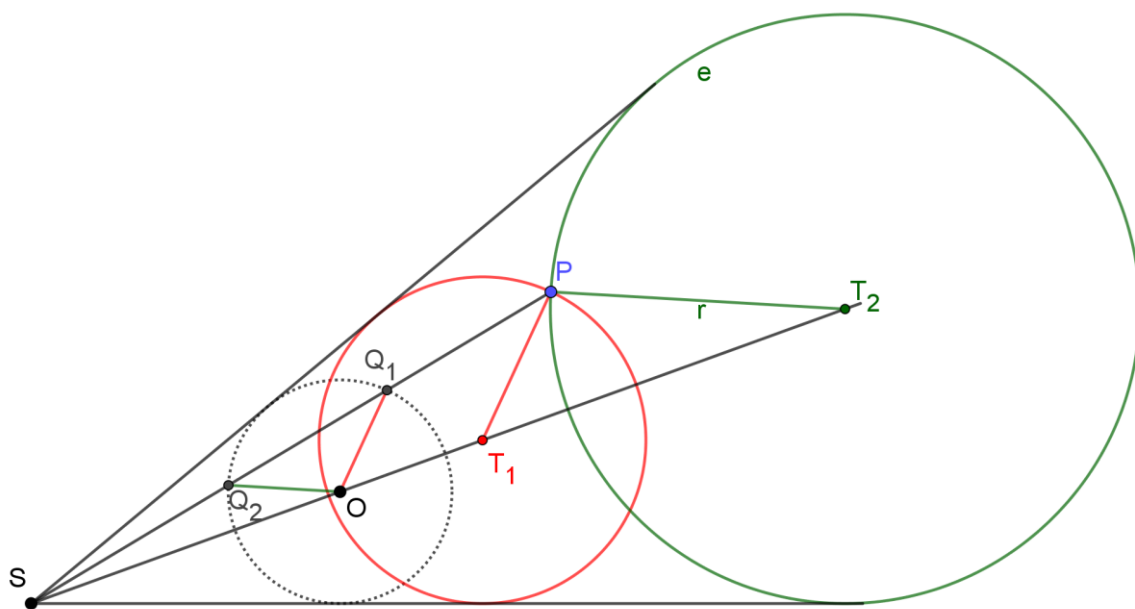


Ezt a feladatot másként is találhatjuk az diákjainknak. Nem áruljuk el nekik a bizonyítandó állítást, csak arra kérjük őket, készítsék el a négyzeteket és kössék össze a megfelelő csúcsokat. Ezek után kérdezhetjük, mit tapasztalnak és ennek mi lehet az oka.

3. Adott egy szög szárai között egy P pont. Szerkesszünk olyan kört, amely érinti a szög szárait és átmegy a P ponton.

Megoldás:

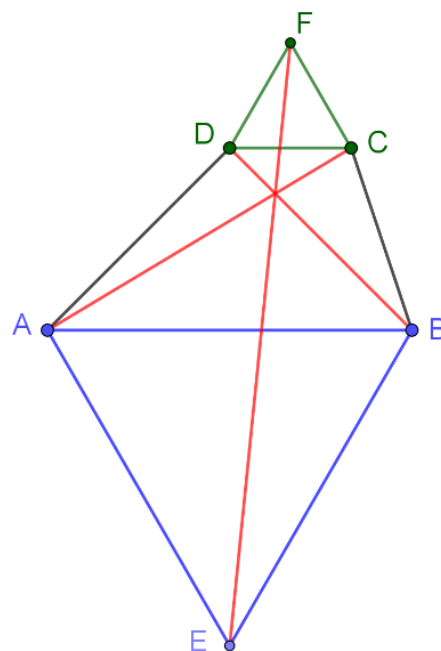
Az első feladatban látott ötlettel dolgozhatunk. Legyen a szög csúcsa S . A keresett kör helyett először egy másikat rajzolunk, amelyik érinti a szög szárait. Ehhez elegendő a szögfelezőn felvenni egy tetszőleges O pontot, majd O körül akkora kört rajzolni, amekkora O távolsága a szög száraitól. Ha ezt a kört S -ből nagyítjuk, akkor továbbra is érinteni fogja a szárakat. Keressük meg, a nagyítás során a kör melyik pontjának lehet majd a képe P . Ez rajta kell legyen P -t a hasonlóság középpontjával, azaz a szög S csúcsával összekötő egyenesen. Így adódik az ábránkon bemutatott két lehetőség. Ha PS a kört Q -ban metszi, akkor QO képe lesz PT , ahol T jelöli a keresett kör középpontját. Mivel QO és PT párhuzamosak, ezért a P -n át QO -val párhuzamosan húzott egyenes kimetszi a szögfelezőből a keresett kör T középpontját.



4. Az $ABCD$ trapézban AB és CD párhuzamosak. Ezekre kifele szerkesztjük az ABE és CDF szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy EF áthalad az átlók metszéspontján.

Megoldás:

Az ABE és CDF háromszögek szabályosak, tehát hasonlóak. Mivel oldalaik párhuzamosak, ezért van olyan középpontos hasonlóság, amelyik egyiket a másikba viszi. Ennek centruma rajta van a megfelelő pontokat összekötő egyeneseken, amik éppen AC , BD és EF .

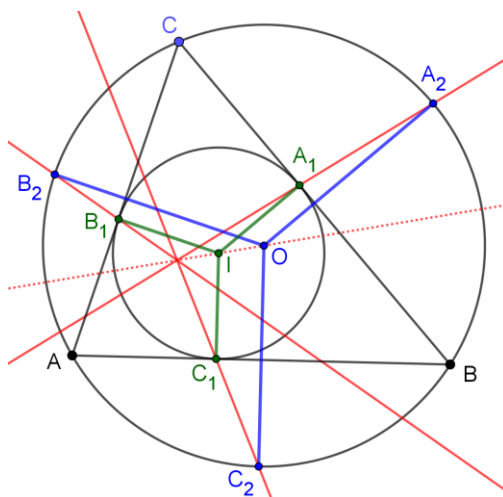


5. Az ABC háromszög beírt köre a BC , CA , AB oldalakat rendre az A_1 , B_1 , C_1 pontokban érinti. Az ABC köré írt kör A -t nem tartalmazó BC ívének felezőpontja A_2 , hasonlóan definiáljuk a B_2 és C_2 pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át.

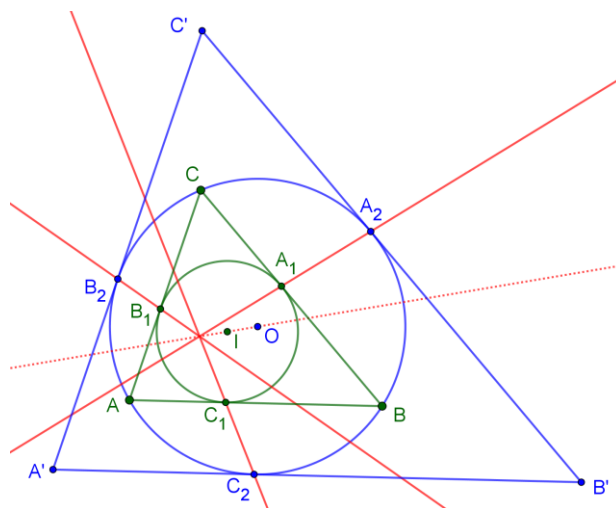
OKTV 1997.II. kategória, 2.forduló 2. példa

Megoldás:

Diákjaim erre a feladatra általában kétféle érvelést hoznak, ezek lényegében azonosak, de mégis másként adódnak. Az első változatban tekintsük a beírt kör I középpontját és a köré írt kör O középpontját. ekkor az I ből az A_1 , B_1 és C_1 pontokba futó három sugár és az O -ból az A_2 , B_2 és C_2 pontokba futó három sugár páronként párhuzamos, hiszen mindig merőlegesek a háromszög megfelelő oldalára. A két kör hasonló, létezik olyan középpontos hasonlóság, amelyik egyiket a másikba viszi. Az azonos állású sugarak egymásnak megfelelőek, ezért az A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 egyenesek mind áthaladnak a középpontos hasonlóság centrumán. Gondolatmenetünkéből egyúttal az is adódott, hogy a metszéspont rajta lesz az OI egyenesen.



A második változathoz húzzuk meg a köré írt kör érintőit a 2-es indexű pontokban. Ezek az érintők meghatároznak egy nagyobb $A'B'C'$ háromszöget. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek középpontosan hasonlóak, mivel oldalaik páronként párhuzamosak. A középpontos hasonlóság esetén a megfelelő pontok összekötő egyenesei áthaladnak a centrumon, az 1-es és 2-es indexű pontok pedig éppen megfelelőek, hiszen a beírt kör érintési pontjai az ABC és az $A'B'C'$ háromszögben.

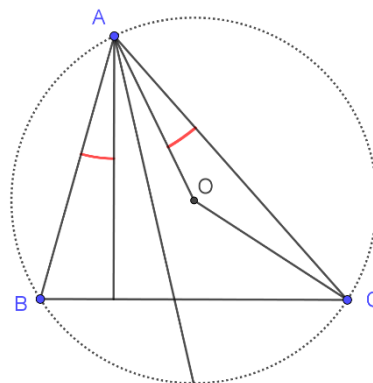


6. Legyen az ABC háromszögbe írt kör középpontja I , a köré írt kör középpontja O . A BC oldalhoz hozzáírt kör középpontjának tükörképe a BC oldalra legyen A' , az AA' egyenes tükörképe az A -ból induló szögfelezőre legyen l_a . Hasonlóan definiáljuk l_b -t. Igazoljuk, hogy az l_a és l_b egyenesek metszéspontja rajta van az OI egyenesen. *Olimpiai válogatóverseny, Kecskemét, 2017*

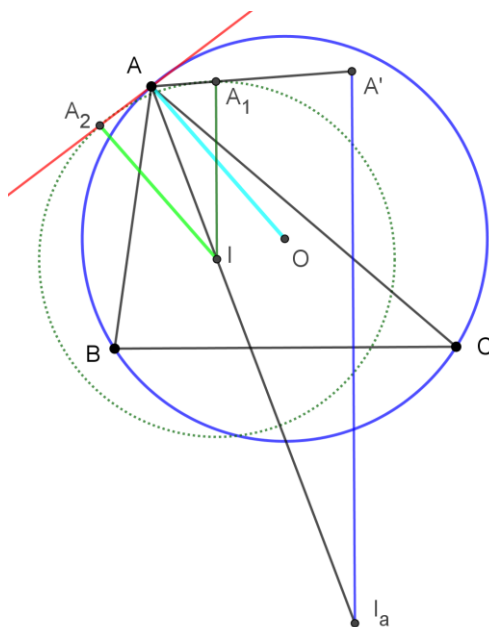
Megoldás:

Ez a feladat a 2016-os Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára javasolt geometria feladatok közül való, meglehetősen nehéz. A kecskeméti válogatóversenyen az olimpiai kvalifikáció során a legjobb 24 közé került diákok közül ketten oldották meg. Williams Kada megoldása komplex számokat használt. Váli Benedek nagyon ügyes észrevétellel, hasonlósággal oldotta meg a feladatot, kövessük nyomon az ő gondolatmenetét.

Előkészítésként gondoljuk meg, hogy amennyiben az ABC háromszögnek meghúzzuk az A -ból induló magasságát és A -t összekötjük a köré írt kör középpontjával ez a két vonal szimmetrikus lesz az A -ból induló szögfelezőre, mivel ábránkon mindkét jelölt szög $90^\circ - \beta$.



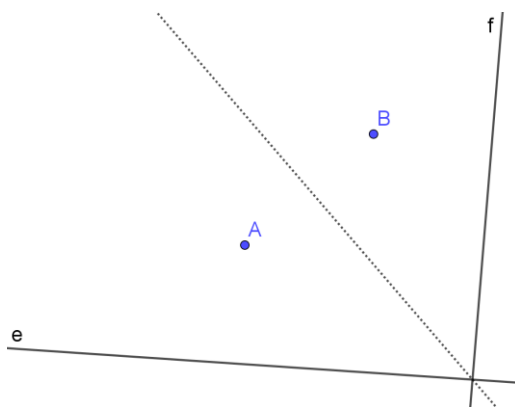
Benedek remek észrevétele az volt, hogy a háromszög beírt és a oldalhoz hozzáírt köre egymáshoz hasonló és külső hasonlósági pontjuk éppen A . Az A' pontot úgy is megkaphatjuk, ha az a oldalhoz hozzáírt kör I_a középpontjából az a oldalra merőlegesen felmérjük kétszer a sugarat. Ennek kicsinyített képe, ha a beírt kör I középpontjából mérjük fel ugyanilyen irányba kétszer a beírt kör r sugarát, így kapjuk az A_1 pontot. Az AA_1 egyenes ugyanaz, mint az AA' egyenes hiszen A a középpontos hasonlóság centruma. Az AA_1 egyenest tükrözzük az A -ból induló szögfelezőre, tehát A_1 -et kell tükröznünk, és így kapjuk az A_2 pontot $l_a = AA_2$. Mivel az IA_1 egyenes merőleges a BC oldalra, ezért tükörképe IA_2 éppen párhuzamos lesz OA -val. Most készen vagyunk hiszen az ABC háromszög köré írt köre és az I középpontú $2r$ sugarú kör középpontosan hasonló, ugyanolyan állású sugaraik végpontjait összekötő egyenesek, azaz l_a és l_b , továbbá a körök középpontjait összekötő OI átmennek a hasonlóság centrumán.



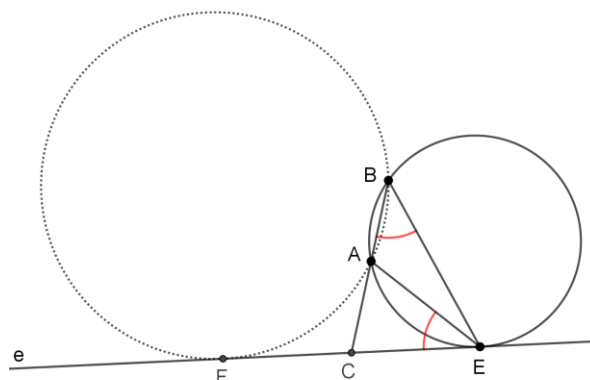
7. Adott egy e egyenes, egyik oldalán két pont A és B . Szerkesszünk olyan kört, amely érinti az e egyenest és áthalad a két ponton.

Megoldás:

A szerkesztések során pontokat keresünk, a pontokat egyenesek vagy körök metszéspontjaként kapjuk. Nyilvánvalóan adódik, hogy esetünkben a keresett kör középpontjára vadászunk. Az is könnyen látszik, hogy ez rajta lesz AB felező merőlegesén. Ez a felező merőleges egyúttal a kör egyik szimmetriatengelye. Ezért ha erre tükrözzük az e egyenest, akkor megkapjuk a kör egy másik f érintőjét. Ezzel visszavezettük a feladatot a 3. feladatunkra (e, f, A).



Noha nagyon egyszerűnek tűnhet a megoldás, erre nem olyan könnyű rájönni. Most bemutatunk egy másik lehetséges utat, ehhez több dologra is szükségünk lesz. Induljunk ki a kész ábrából, legyen az AB egyenes és e metszéspontja C , legyen a keresett kör érintési pontja e -n E . Ekkor a $CBE\angle = AEC\angle$, hiszen az AE ívhez tartozó kerületi, illetve érintő szárú kerületi szögek. Ezért az ACE és ECB háromszögek hasonlóak (C -nél közös szög és $CBE\angle = AEC\angle$). Így a megfelelő oldalak aránya egyenlő azaz $AC:CE = CE:CB$, amiből $CE^2 = AC \cdot CB$. Mivel AC és CB ismertek, ezért mértani közepük szerkeszthető (pl magasság tétellel), így megkapjuk E -t. A feladatnak mindkét megoldásánál ugyanakkora a C -ből a keresett körhöz húzott érintő, $CE = CF$.



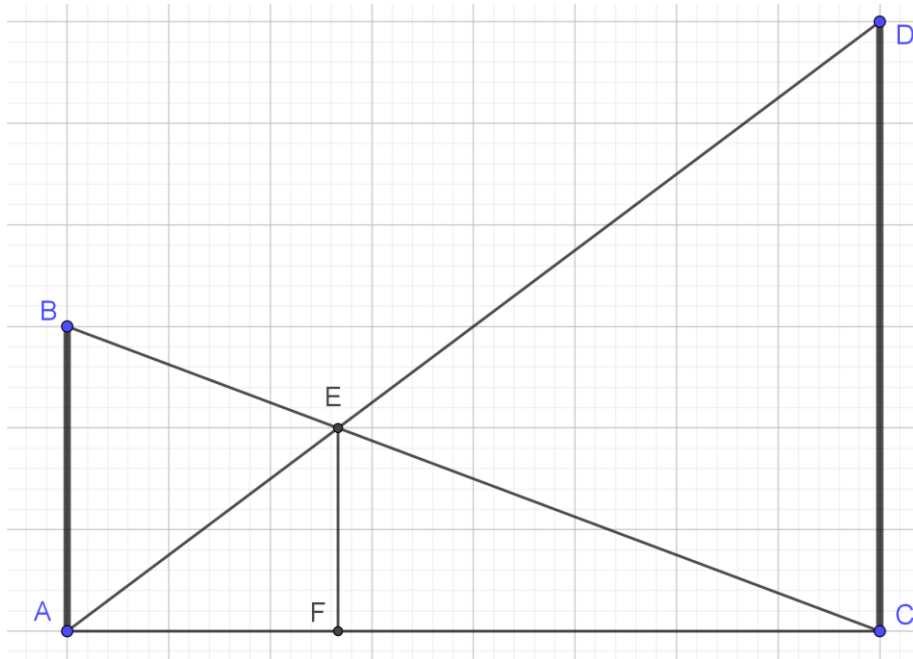
A harmadik és hetedik feladat egy nagyobb kérdéskörhöz vezetnek bennünket, ez pedig az Apollonius féle probléma: tekintsünk három alakzatot, amelyek mindegyike lehet pont, kör, vagy egyenes. Szerkesztendő olyan kör, aminek mindhárom alakzattal egyetlen közös pontja van. Némi meggondolással adódik, hogy így összesen 10 féle alapeladat van, ezek közül ha a három alakzat mindegyike pont, akkor a háromszög köré írt köre a megoldás. Ha mindhárom alakzat egy egyenes, akkor általános esetben az általuk meghatározott háromszög beírt és hozzáírt körei a szerkesztendőek. A 2 egyenes 1 pont illetve 2 pont 1 egyenes esetét most átvettük, érdemes innen a

2 egyenes 1 kör esetével folytatni. Amennyiben a bevezetőben említett harmadik szinten is tudunk dolgozni, és előkerül a pont körre vonatkozó hatványa, körök hatványvonala, akkor a 2 pont 1 kör esetet és az 1 pont, 1 kör 1 egyenes esetet is szépen meg tudjuk oldani. Az Apolloniusz féle feladat jóval nehezebb, ha mindhárom alakzat kör.

8. A vízszintes talajon áll két függőleges rúd. Az egyik 3, a másik 6 méter magas. Egy egyenes drótkötél feszül ki minkét rúd aljától a másik tetejéig. Milyen magasan van a feszítő kötelek találkozási pontja?

Megoldás:

Legyen a 3 méteres rúd alsó pontja A , felső pontja B ; a 6 méteres rúd alsó pontja C , felső pontja D ; a feszítő drótkötelek találkozási pontja E , ennek vetülete a talajon F . Ekkor az ABE és DCE háromszögek hasonlóak, hiszen oldalaik párhuzamosak, hasonlóságuk aránya AB és DC aránya, azaz $1:2$. Így a két említett háromszög E -hez tartozó magasságának aránya is $1:2$, azaz F éppen az AC szakasz A -hoz közelebbi harmadolópontja. Most vegyük észre, hogy CFE és CAB is hasonlóak, ebből pedig $CF:EF=CA:AB$, azaz $EF=(CF/CA) \cdot AB=2/3 \cdot 3=2$. A találkozási pont 2 méter magasan van.



A feladat általában meglepi a diákjaimat, úgy tűnik, mintha kevés lenne a megadott adat, kéne még AC hosszúsága. A megoldásból kiderült, hogy erre nem volt szükség. A fokozatosság elve alapján adjuk fel ezt a feladatot először így, konkrét számokkal. Aztán megbeszélhetjük $AB=x$ és $CD=y$ paraméterekkel. Paraméteresen számolva

$$EF = \frac{CF}{CA} \cdot AB = \frac{y}{x+y} \cdot x = \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

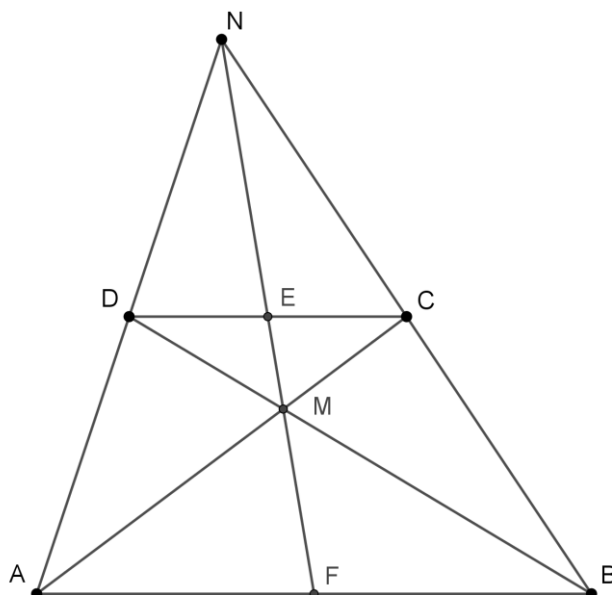
Tehát EF éppen az alapok harmonikus közepének fele. Észrevehetjük, hogy a „talajra merőleges” részletnek nincs jelentősége, $ABCD$ egy trapéz, melynek átlóinak metszéspontján át párhuzamost húztunk az alapokkal.

Azt is észrevehetjük, hogy F -et E -re tükrözve éppen a BD egyenesre jutunk.

9. Az $ABCD$ trapéz átlóinak metszéspontja legyen M , a szárak egyeneseinek metszéspontja N . Bizonyítsuk be, hogy az MN egyenes felezi a trapéz alapjait.

Megoldás:

Az AB és CD szakaszok párhuzamosak, ezért van olyan középpontos hasonlóság, amelyik egyiket a másikba viszi. Pozitív arány esetén a középpont N lesz, negatív arány esetén a középpont M lesz. Legyen AB felezőpontja F , CD felezőpontja E . Az N középpontú nagyítás DC -t AB -be viszi, DC középpontját AB középpontjába, ezért N, E, F egy egyenesen vannak. Ugyanilyen érveléssel M, E, F is egy egyenesen vannak, tehát a négy pont mind ugyanazon az egyenesen van rajta.



10. (a) Adott két pont A és B és egy AB -vel párhuzamos egyenes. Csak vonalzóval szerkesszük meg az AB felezőpontját. (b) Adott az AB szakasz az F felezőpontjával, továbbá egy C pont, amely nincs az AB egyenesen. Csak vonalzóval szerkesszünk C -n át AB -vel párhuzamost.

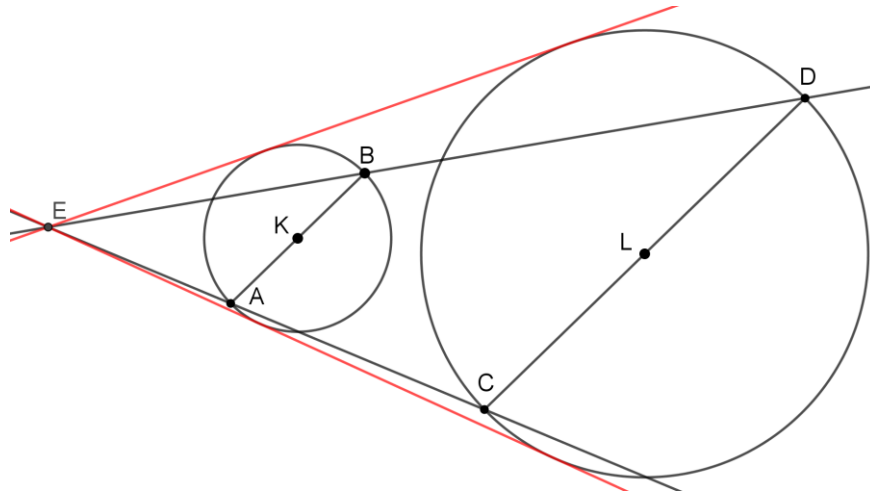
Megoldás:

- (a) Az előző feladat eredményét fogjuk használni. Az AB -vel párhuzamos egyenesen kijelölünk egy C és D pontot, ezzel létrehoztunk egy trapézt. Vonalzónkkal megszerkeszthetjük a fenti ábra M és N pontját, az MN egyenes pedig kimetszi AB -ből annak F felezőpontját.
- (b) Most is az előző feladatot használjuk. Húzzuk meg a BC egyenest és ennek jelöljük ki egy N pontját. NF és AC metszéspontja legyen M . BM és AN metszéspontja D' . Meg szeretnénk mutatni, hogy CD' párhuzamos AB -vel. Legyen az AN egyenesnek az a pontja D , amelyre CD és AB párhuzamos. Ekkor $ABCD$ trapéz átlóinak metszéspontja rajta van az NF egyenesen. Mivel AC az egyik átló és AC és NF metszete M , ezért az $ABCD$ másik átlója a BM egyenes és így $D'=D$.

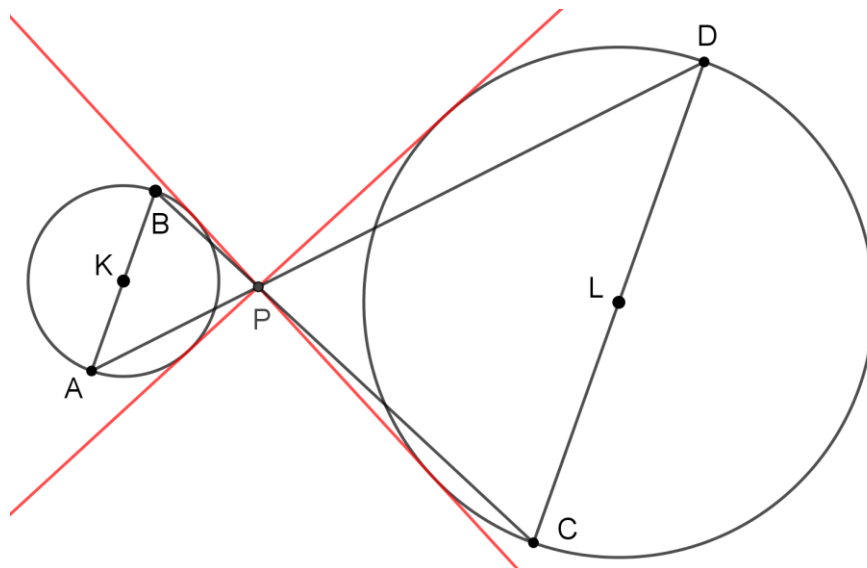
11. Adott két diszjunkt, különböző sugarú kör a középpontjaikkal. Csak vonalzóval szerkesszük meg közös külső érintőiknek a metszéspontját.

Megoldás:

Használjuk ki hogy bármely két kör hasonló. A két kör közös külső érintőinek metszéspontja egyúttal a két kör külső hasonlósági pontja, amelyből a kisebb egy pozitív arányú nagyítással a nagyobbá vihető. Legyen a két kör középpontja K és L . A K középpontú körben húzzunk egy K -n áthaladó egyenest, ez a kört az A és B pontokban metszi. Mivel AB -nek K a felezőpontja, ezért az előző feladat segítségével AB -vel párhuzamost tudunk húzni L -en át. Az AB -vel párhuzamos egyenesnek az L középpontú körrel vett metszéspontjai legyenek C és D . AB és CD a két kör párhuzamos átmérői, ezért a középpontos hasonlóság során egymás képei lesznek. Ábránk betűzését használva AC és BD egyenesek E metszéspontja lesz a két kör külső hasonlósági pontja.



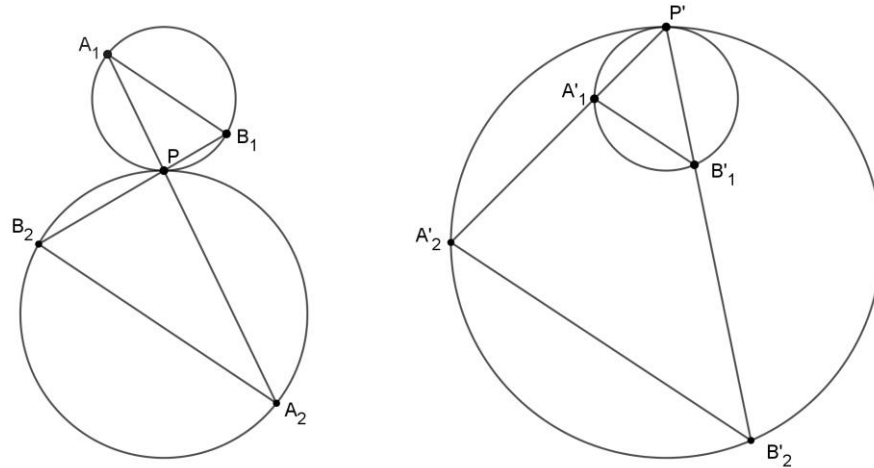
AD és BC metszéspontja pedig a belső hasonlósági pontja, azaz a közös belső érintők P metszéspontja:



12. A k_1 és k_2 körök egymást P -ben érintik. Messe egy P -n átmenő szelő P -n kívül k_1 -et még A_1 -ben és k_2 -t még A_2 -ben; továbbá egy P -n átmenő másik szelő k_1 -et B_1 -ben és k_2 -t B_2 -ben. Bebizonyítandó, hogy PA_1B_1 és PA_2B_2 háromszögek hasonlóak. *Kürschák verseny 1933. 3. feladat*

Megoldás:

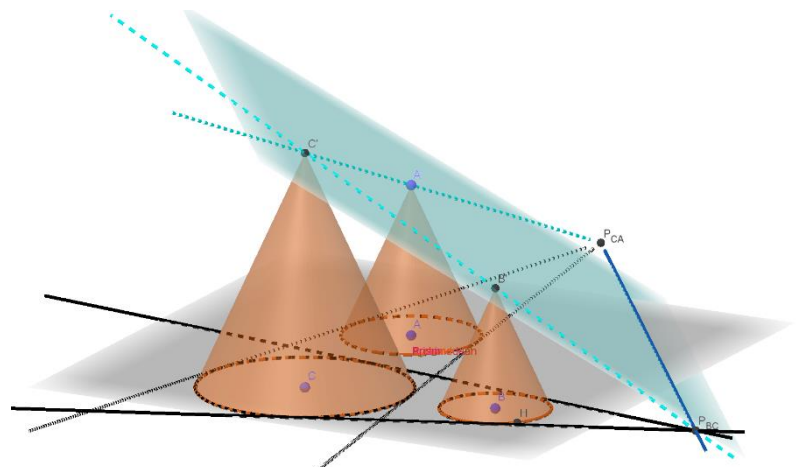
Feladatunkhoz két ábrát is készíthetünk, ha a két kör kívülről, vagy belülről érintik egymást. Mindkét esetben mondhatjuk ugyanazt az érvelést. A két kör középpontosan hasonló, közös érintési pontjukból a kisebb kör a nagyobbba vihető nagyítással. Ez a középpontos hasonlóság A_1 -et A_2 -be viszi, B_1 -et B_2 -be viszi. Így a PA_1B_1 és PA_2B_2 háromszögek hasonlóak.



13. Adott három kör k_A, k_B, k_C egyik sincs a másik belsejében. Legyen a k_A és k_B körök külső hasonlósági pontja P_{AB} , hasonlóan definiáljuk a P_{BC} és P_{CA} pontokat. Igazoljuk, hogy ez a három pont egy egyenesen van. (Monge-féle három kör tétel)

Megoldás:

A tételre sokféle bizonyítás adható. Lépünk ki a háromdimenziós térbe és mindhárom kör fölé képzeljünk egy kúpot, amelynek ugyanakkora a nyílásszöge, így a kúpok egymáshoz hasonlóak. A körök középpontjai legyenek A, B, C , a megfelelő kúpok csúcsai rendre A', B', C' . A P_{BC} pontból a k_B kör a k_C körbe vihető középpontos hasonlósággal. A kis kúp képe a nagy kúp lesz, tehát B' képe C' , azaz P_{BC}, B' és C' egy egyenesen vannak. Hasonlóan tekinthetjük a másik két körpárt. (Az ábra az áttekinthetőség megőrzéséért nem tartalmazza az összes vonalat.) Készen is vagyunk, hiszen a P_{AB}, P_{BC} és P_{CA} pontok rajta vannak a körök síkján, de egyúttal rajta vannak a kúpcsúcsok, azaz A', B', C' által meghatározott síkon is. Mivel két sík metszévonalja egyenes, ezzel a bizonyítást befejeztük.

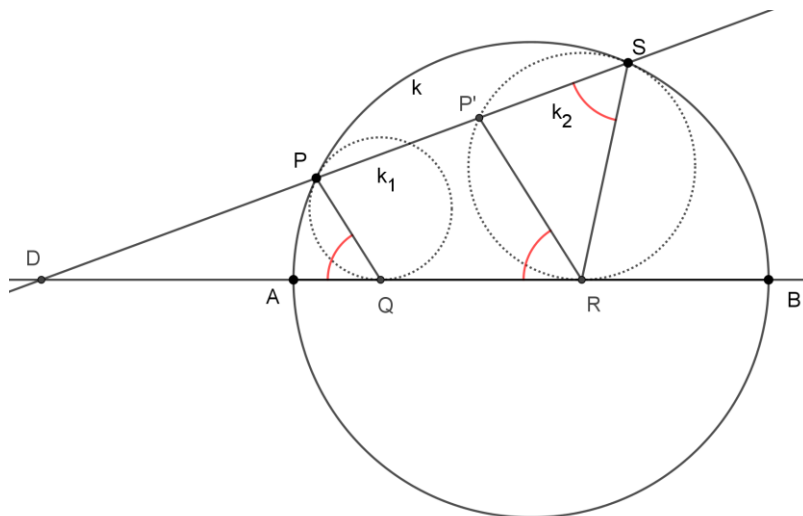


14. Adott a k kör és annak egy AB átmérője. A k_1 és k_2 körök az AB által meghatározott egyik félkör belsejében helyezkednek el; k_1 a k kört a P pontban, AB -t a Q pontban érinti; ugyanígy k_2 a k kört az S , az AB -t pedig az R pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy a $PQRS$ négyszög húrnégyszög.

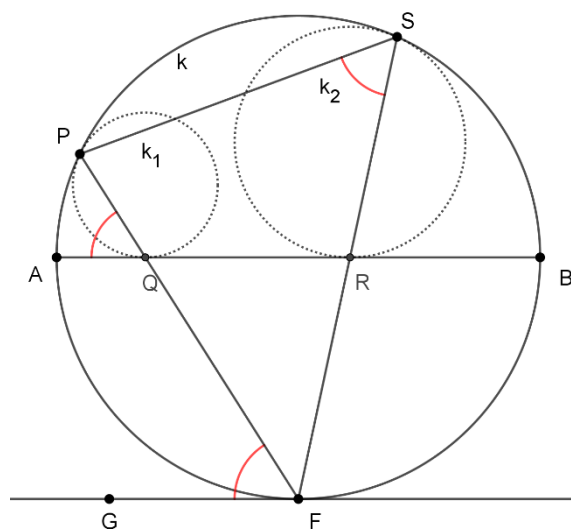
2001-2002. OKTV 2001-02. II. kategória 1. forduló 5. feladat

Megoldás:

Két különböző megoldást is bemutatunk. A feladatban három kör szerepel, alkalmazzuk ezekre az előző feladatban látott Monge tételt. Tekintsük páronként a körök közös hasonlósági pontjait: ez k és k_1 esetén az érintési pontjuk, azaz P . Ugyanígy k és k_2 esetén S . Ezek szerint a k_1 és k_2 körök külső hasonlósági pontja rajta van a PS egyenesen, továbbá rajta van a QR egyenesen, amely közös külső érintőjük. Legyen PS és QR egyenesek metszéspontja D , a Monge tételből következően ez lesz k_1 és k_2 körök külső hasonlósági pontja. D -ből nagyítjuk k_1 -et úgy, hogy a képe k_2 legyen. Ekkor Q képe R . P képe rajta van a DP egyenesen és k_2 -n, ábránk szerint legyen ez a pont P' . A középpontos hasonlóság miatt $PQD\angle = P'RD\angle$, másrészt a k_2 körben $P'RD\angle = P'SR\angle$, hiszen a $P'R$ ívhez tartozó kerületi és érintő szárú kerületi szögek. Azt kaptuk, hogy a $PQRS$ négyszög S -nél levő szöge éppen a Q -nál levő külső szögével egyenlő, amiből következik, hogy $PQRS$ szemközti szögeinek összege egyenlő, azaz a négyszög húrnégyszög.



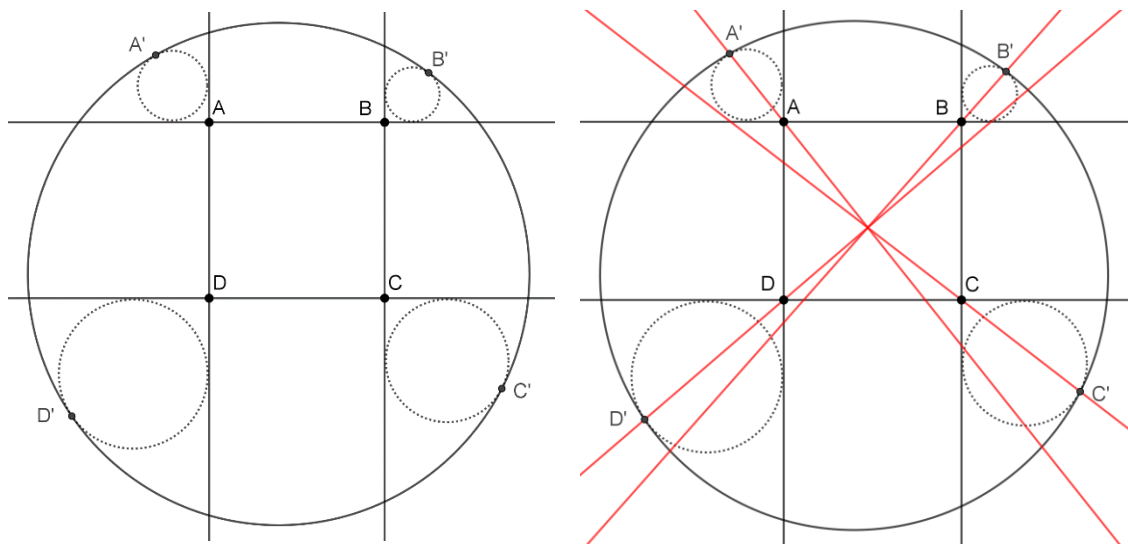
Második megoldásunkban is a hasonlóságot fogjuk használni. Mivel k és k_1 külső hasonlósági pontja P , ezért P -ből k_1 -et nagyítva megkaphatjuk k -t. Ezen nagyítás során Q képe egyrészt rajta lesz a PQ egyenesen, másrészt Q képe a k kör AB -vel párhuzamos érintőjének érintési pontja, azaz a P -t nem tartalmazó AB ívnek az F felezőpontja. Ugyanígy érvelhetünk a másik körnél és kapjuk, hogy SR is áthalad F -en. Az F -en áthaladó érintőn felvettük az ábra szerint a G pontot. Most $PFG\angle = PSF\angle$, hiszen k -ban a PF ívhez tartozó kerületi és érintő szárú kerületi szögek. Továbbá $PFG\angle = PQA\angle$, egyállású szögek. Az előző megoldásban kapott szögekkel készen vagyunk.



15. A k kör belsejében van az $ABCD$ négyzet. Tekintsük azt a kört, amely belülről érinti k -t és érinti az AB és AD egyenesek A -ból induló B -t és D -t nem tartalmazó felét, ez a kör k -t A' -ben érinti. Hasonlóan kapjuk B' , C' és D' pontokat. Igazoljuk, hogy AA' , BB' , CC' és DD' egy ponton mennek át.

Megoldás:

Vannak olyan feladatok, amelyeknél már az ábra készítése is némi fejtörést okozhat. A nagy k kört és a négyzetet még könnyű megrajzolni, de a kicsi körök nehezebben szerkeszthetők.



Vegyük komolyan az előző feladatokban megtanult leckét! Bármely két kör hasonló, tekintsük az A' -ben érintkező két kört. Ezek külső hasonlósági pontja A'' . Ha A'' -ből kinagyítom a kicsi szaggatott kört, akkor az k -ba jut. Mivel a kicsi körnek látjuk két érintőjét, az AB és AD egyeneseket, ezeket is kinagyíthatjuk, így k -nak kapjuk az AB -vel és AD -vel párhuzamos érintőit, ezek metszéspontja legyen A_1 . Az A'' középpontú nagyítás során A képe A_1 , így ez a három pont egy egyenesen van. A továbbiakban a piros $A''A$ egyenesre már úgy gondolhatunk, mint az AA_1 egyenesre. Ismételjük el mindezt a többi csúcsra, így a piros egyenesek az AA_1 , BB_1 , CC_1 és DD_1 lesznek, melyek a középpontosan hasonló $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ négyzetek megfelelő csúcsait kötik össze, tehát egyúttal áthaladnak a két négyzet (negatív arányú) hasonlósági pontján.

