



PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar



Katolikus
Pedagógiai
Intézet

Középiskolai matematikatanárok szaktárgyi továbbképzése

2021. november 12.



PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

A HAZAI ÉS A NEMZETKÖZI ÉRETTSÉGI: HASONLÓSÁGOK ÉS KÜLÖNBSÉGEK

2021. november 12.

Gróf Andrea

Karinthy Frigyes Gimnázium, Budapest

HASONLÓSÁGOK

...de nem egészen...

- Matematikából mindenkinek kell érettségizni,
de nemcsak “érettségi”: oktatási rendszer, el kell végezni a kurzust.
- Két szint van: emelt, közép,
de mindegyik szintű kurzusból kétféle van.
A középszint sokkal nehezebb a hazainál.
- Megfogalmazták a tantárgy célkitűzéseit (kompetenciák, stb.)
kicsit más, de a lényeg ugyanaz.
- A vizsgakövetelmények hasonlóan táblázatba foglalva,
de ötévenként változtatnak rajta.

HASONLÓSÁGOK

...de nem egészen...

- A főbb témakörök a matematika fejezetei (a tanítás sorrendje a tanárra van bízva),
de a tartalomban vannak különbségek.
Mindkét szinten több tananyag.
- A vizsgán törekednek a tananyag minél teljesebb lefedésére.
- 1-1 pontokra lebontott javítókulcs,
de kissé különböző a pontozás logikája
- Több megoldási módszerhez van pontozás: a megfeleltethető lépések lehetőleg azonosan súlyozva,
de van, amikor előírják a módszert.
-

KÜLÖNBSÉGEK

Segédeszközök

Hazai érettségi

- Négyjegyű “függvénytábla” az írásbelin: részletes leírás.
- Számológép mindig használható.
- Elvileg számológép nélkül is lehetséges, bár körülményes.

Nemzetközi Érettségi

- Csak képletgyűjtemény, magyarázat nélkül.
- Az egyik dolgozat számológép nélküli.
- A másik dolgozathoz szükség van grafikus számológépre (pl. $x = \cos x$ megoldása).

KÜLÖNBSÉGEK

A dolgozatok javítása

Hazai érettségi

- Középszinten a tanár javítja.
- A javításvezető (emelt szint) szűrőpróbával ellenőriz.
- Meggyőzi a javítót a korrekció szükségességéről.
- A diák megnézheti a kijavított dolgozatot.

Nemzetközi Érettségi

- Mindkét szinten független javító.
- Algoritmus által kijelölt minta (10%), a moderátor felüljavítja.
- Ez alapján a javító által adott összes pontszám korrekciója.
- A diák / az iskola pénzért újravizsgát kérhet, de a dolgozatot nem látja viszont.

KÜLÖNBSÉGEK

A számonkérés módja

Hazai érettségi

- Emelt szinten van szóbeli.
- Az írásbelin van választási lehetőség.
- Csak a vizsga.

Nemzetközi Érettségi

- Egyik szinten sincs szóbeli.
- Minden feladat kötelező.
- 5 perc olvasási idő az elején.
- Van egy 6-12 oldalas önálló kutató-felfedező munka (belső értékelés, külső moderálás).

KÜLÖNBSÉGEK

A feladatsorok összetétele

Hazai érettségi

- Kevesebb feladat, több idő a töprengésre.
- Vannak bonyolult szövegek (a szövegértés a feladat része).
- Változatosabb, de egyszerűbb feladatok.
- Sportot űznek a témakörök keveréséből.

Nemzetközi Érettségi

- Sok feladat (az idő 75%-ában írni kell).
- Nemzetközi: gondolnak a nem anyanyelven írókra.
- Nehezebb (több a tananyag) komplex feladatok, több egymásra épülő részfeladat.
- Csak ahol természetesen adódik.

HASONLÓ FELADAT, KISSÉ MÁS PONTOZÁS

Feladatok (hazai érettségi)

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$2^{2x+2} + 31 \cdot 2^x - 8 = 0$$

2. Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot!

3. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\sin^3 x - \sin x = 0$$

HASONLÓ FELADAT, KISSÉ MÁS PONTOZÁS

Javítási útmutató

$$2^{2x+2} + 31 \cdot 2^x - 8 = 0$$

$4 \cdot 2^{2x} + 31 \cdot 2^x - 8 = 0$	1 pont	
A kapott egyenlet másodfokú 2^x -ben.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$2^x = -8$ vagy $2^x = \frac{1}{4}$ Kettős vonal választja el a "gondolati egységeket".	1 pont	
Az első eset nem lehetséges (mert $2^x > 0$ minden valós x esetén).	1 pont	Sok pont jár kikötésekért, esetek kizárásáért és ellenőrzésért.
A második esetből (pl. a szigorú monotonitás miatt) $x = -2$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

HASONLÓ FELADAT, MÁSPONTOZÁSI RENDSZER

*Feladat lehetne**

1. Az alábbi egyenlet megoldása kifejezhető $a + \log_2 b$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Határozza meg a és b értékét.

$$2^{2x+4} = 2^{x+1} + 5$$

2. Egy mértani sorozat első három tagja egyben egy számtani sorozat első, kilencedik, illetve tizengyedik tagja is. A mértani sorozatból képzett mértani sor összege $10\frac{2}{3}$. Határozza meg a mértani sorozat kvóciensét és a számtani sorozat differenciáját.

3. Keresse meg a $\tan x + \cot x = 5$ egyenlet összes megoldását a $]0^\circ, 360^\circ[$ intervallumban.

**A vizsgafeladatokat copyright védi. Az itt bemutatott feladatok ebben a formában nem voltak vizsgán, de vizsgafeladatok alapján készültek.*

HASONLÓ FELADAT, KISSÉ MÁS PONTOZÁS

Javítási útmutató lehetne

$$2^{2x+4} - 2^{x+1} - 5 = 0$$

Legyen $y = 2^x$

$$16y^2 - 2y - 5 = 0$$

$$(8y - 5)(2y + 1) = 0$$

$$y = -\frac{1}{2} \text{ vagy } y = \frac{5}{8}$$

$$2^x = \frac{5}{8}$$

$$x = \log_2 5 - \log_2 8$$

$$= -3 + \log_2 5 \quad (a = -3, b = 5)$$

$$2^{2x+4} = 2^{x+1} + 5$$

$a + \log_2 b$ alakban

Módszer-pont

Alkalmazás-pont

Itt van a felismerés, hogy a másik érték nem jó, de nem kell kimondani.

Ellenőrzést
nem kérnek.

HASONLÓ FELADAT, KISSÉ MÁS PONTOZÁS

Feladatok (hazai érettségi)

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$2^{2x+2} + 31 \cdot 2^x - 8 = 0$$

2. Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot!

3. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\sin^3 x - \sin x = 0$$

HASONLÓ FELADAT, KISSÉ MÁS PONTOZÁS

Javítási útmutató

Ha a számtani sorozat első tagja a , akkor a 3. tagja $a + 3,2$. A 7. tag $a + 9,6$.	1 pont
A mértani sorozat tulajdonsága miatt $(a + 3,2)^2 = a(a + 9,6)$.	1 pont
$a^2 + 6,4a + 10,24 = a^2 + 9,6a$	1 pont
$3,2a = 10,24$, amiből $a = 3,2$.	1 pont
A három szám: 3,2; 6,4; 12,8.	1 pont
Ellenőrzés: ezek valóban tekinthetők egy (2 kvóciensű) mértani sorozat első három tagjának.	1 pont
Összesen:	6 pont

mértani első
három tag
= számtani első,
kilencedik,
tizengyedik tag

Kettős vonal alatt van
→ rossz egyenlet jó
megoldásáért elvi hiba
esetén is pont jár.

HASONLÓ FELADAT, MÁSPONTOZÁSI RENDSZER

*Feladat lehetne**

1. Az alábbi egyenlet megoldása kifejezhető $a + \log_2 b$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Határozza meg a és b értékét.

$$2^{2x+4} = 2^{x+1} + 5$$

2. Egy mértani sorozat első három tagja egyben egy számtani sorozat első, kilencedik, illetve tizenegyedik tagja is. A mértani sorozatból képzett mértani sor összege $10\frac{2}{3}$.

Határozza meg a mértani sorozat kvóciensét és a számtani sorozat differenciáját.

3. Keresse meg a $\tan x + \cot x = 5$ egyenlet összes megoldását a $]0^\circ, 360^\circ[$ intervallumban.

**A vizsgafeladatokat copyright védi. Az itt bemutatott feladatok ebben a formában nem voltak vizsgán, de vizsgafeladatok alapján készültek.*

HASONLÓ FELADAT, KISSÉ MÁS PONTOZÁS

Javítási útmutató lehetne

1. megoldás

A tagok $a, a + 8d, a + 10d$

$$q = \frac{a + 8d}{a} = \frac{a + 10d}{a + 8d}$$

$$a^2 + 16ad + 64d^2 = a^2 + 10ad$$

$$6ad + 64d^2 = 0$$

$$2d(3a + 32d) = 0$$

$$a = -32d/3$$

$$q = \frac{a + 8d}{a} = \frac{-32d/3 + 24d/3}{-32d/3} = 0.25$$

M0 esetén a feladat(rész) összes rá épülő A pontja elveszik.

A0 esetén a feladat (rész) összes rá épülő A pontja elveszik, de a további M pontok megadhatók.

mértani első
három tag
= számtani első,
kilencedik,
tizenegyedik tag

$$\frac{32}{3} = \frac{a}{1 - 0.25} \Rightarrow a = 8$$

$$d = -\frac{3 \cdot 8}{32} = -0.75$$

HASONLÓ FELADAT, KISSÉ MÁS PONTOZÁS

Feladatok (hazai érettségi)

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$2^{2x+2} + 31 \cdot 2^x - 8 = 0$$

2. Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot!

3. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\sin^3 x - \sin x = 0$$

$$\sin^3 x - \sin x = 0$$

$\sin x(4\sin^2 x - 1) = 0$	1 pont	
$\sin x = 0$ vagy $\sin^2 x = \frac{1}{4}$	1 pont	
Ha $\sin x = 0$, akkor $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.	1 pont	
Ha $\sin^2 x = \frac{1}{4}$, akkor $\sin x = \frac{1}{2}$ vagy $\sin x = -\frac{1}{2}$.	1 pont	$ \sin x = \frac{1}{2}$,
Az első esetben $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ vagy $x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$,	1 pont	tehát $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$,
a második esetben $x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ vagy $x = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.	1 pont	vagy $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	7 pont	

HASONLÓ FELADAT, KISSÉ MÁS PONTOZÁS

*Feladat lehetne**

1. Az alábbi egyenlet megoldása kifejezhető $a + \log_2 b$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Határozza meg a és b értékét.

$$2^{2x+4} = 2^{x+1} + 5$$

2. Egy mértani sorozat első három tagja egyben egy számtani sorozat első, kilencedik, illetve tizengyedik tagja is. A mértani sorozatból képzett mértani sor összege $10\frac{2}{3}$. Határozza meg a mértani sorozat kvóciensét és a számtani sorozat differenciáját.

3. Keresse meg a $\tan x + \cot x = 5$ egyenlet összes megoldását a $]0^\circ, 360^\circ[$ intervallumban.

**A vizsgafeladatokat copyright védi. Az itt bemutatott feladatok ebben a formában nem voltak vizsgán, de vizsgafeladatok alapján készültek.*

HASONLÓ FELADAT, KISSÉ MÁS PONTOZÁS

Javítási útmutató lehetne

$$\tan x + \cot x = 5 \quad]0^\circ, 360^\circ[$$

1. megoldás $\tan x + \frac{1}{\tan x} = 5 \Rightarrow \tan^2 x - 5 \tan x + 1 = 0$

$$\tan x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$x = 78.2^\circ, 258.2^\circ, 11.8^\circ, 191.8^\circ$$

2. megoldás $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 5 \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 5$

$$\frac{1}{\sin 2x} = \frac{5}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{2}{5}$$

$$x = 78.2^\circ, 258.2^\circ, 11.8^\circ, 191.8^\circ$$

SOK RÉSZBŐL ÁLLÓ FELADAT

Feladat lehetne

Itt például polinomosztás,
algebrai azonosságok
ismerete, complex
számok, trigonometria

- (a) Az $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ kifejezést egy elsőfokú és egy másodfokú tényező szorzatára bontva határozza meg az $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ egyenlet gyökeinek pontos értékét.
- (b) A binomiális tétel és a de Moivre-tétel segítségével mutassa meg, hogy $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \sin^2 \alpha$, és hasonlóan fejezze ki $\sin 3\alpha$ értékét is.

- (c) Ebből igazolja a $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$ azonosságot, és adja meg α

Máshogyan
nem jó!

azon értékeit a $[0^\circ, 180^\circ]$ intervallumban, amelyekre az azonosság nem érvényes.

- (d) Az (a) és (c) feladatok eredményeit felhasználva határozza meg $\tan 15^\circ$ és $\tan 75^\circ$ pontos értékét.

SOK RÉSZBŐL ÁLLÓ FELADAT

Megoldás

(a) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$
egyenlet gyökei;

(b) Mutassa meg, hogy
 $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \sin^2 \alpha$

(a) Mivel $x = -1$ gyök, $x + 1$ osztó.

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x + 1)(x^2 - 4x + 1)$$

$$x_1 = -1$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ gyökei } x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$$

(b) De Moivre-tételéből $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$

$$\text{A binomiális tétellel: } (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 =$$

$$= \cos^3 \alpha + 3\cos^2 \alpha \cdot i \sin \alpha + 3\cos \alpha \cdot i^2 \sin^2 \alpha + i^3 \sin^3 \alpha =$$

$$= \cos^3 \alpha + i \cdot 3\cos^2 \alpha \sin \alpha - 3\cos \alpha \sin^2 \alpha - i \cdot \sin^3 \alpha$$

$\cos 3\alpha$ a kifejezés valós része (amely valóban $\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \sin^2 \alpha$).

$\sin 3\alpha$ a képzetes rész,

$$\text{így } \sin 3\alpha = 3\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

SOK RÉSZBŐL ÁLLÓ FELADAT

Megoldás

Igazolja a $\tan 3\alpha$ azonosságot.
Mikor nem érvényes?

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \tan 3\alpha &= \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \sin^2\alpha} = \\ &= \frac{\frac{3\cos^2\alpha \sin\alpha}{\cos^3\alpha} - \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}}{\frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha} - \frac{3\cos\alpha \sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}} = \frac{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}}{1 - 3\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \left(= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} \right) \end{aligned}$$

Nem érvényes, ha $\cos\alpha = 0$, azaz $\alpha = 90^\circ$
vagy $\cos 3\alpha = 0$, azaz $3\alpha = 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ$
 $\alpha = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$

SOK RÉSZBŐL ÁLLÓ FELADAT

Megoldás

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan 15^\circ \text{ és } \tan 75^\circ$$

(d) Ha $\alpha = 15^\circ$ vagy $\alpha = 75^\circ$, akkor $\tan 3\alpha = 1$.

Megoldandó az $1 = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$ egyenlet.

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$$

Visszatért az (a) feladat.

$$x_1 = -1, x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$\tan 15^\circ$ és $\tan 75^\circ$ pozitívak és $\tan 15^\circ < \tan 75^\circ$.

$$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \text{ és } \tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

SOK RÉSZBŐL ÁLLÓ FELADAT

Feladat lehetne

Legyen $f(x) = \frac{x^2}{3^x}$, ahol $x > 0$.

(a) Mutassa meg, hogy $f'(x) = \frac{2x - x^2 \ln 3}{3^x}$.

Hogy továbbléphessen,
ha egy rész nem ment.

(b) Adja meg $f''(x)$ kifejezését a lehető legegyszerűbb alakban.

(c) Határozza meg az $f'(x) = 0$ egyenlet gyökének pontos értékét, és mutassa meg, hogy ebben a pontban a függvénynek maximuma van.

(d) Határozza meg az f függvény két inflexiós pontját.

SOK RÉSZBŐL ÁLLÓ FELADAT

Megoldás

$$(a) \quad f'(x) = \frac{2x \cdot 3^x - x^2 \cdot 3^x \ln 3}{3^{2x}} \left(= \frac{2x - x^2 \ln 3}{3^x} \right)$$

$$(b) \quad f''(x) = \frac{(2 - 2x \cdot \ln 3) \cdot 3^x - (2x - x^2 \ln 3) \cdot 3^x \ln 3}{3^{2x}} \\ = \frac{2 - 4x \cdot \ln 3 + x^2 \cdot (\ln 3)^2}{3^x} =$$

$$(c) \quad 2x - x^2 \ln 3 = 0, \text{ ahonnan } x = \frac{2}{\ln 3}.$$

Ezzel az x értékkel $f''(x) = \frac{2-8+4}{\text{pozitív érték}} < 0$, tehát maximum.

SOK RÉSZBŐL ÁLLÓ FELADAT

Megoldás

$$(d) x^2 \cdot (\ln 3)^2 - 4x \cdot \ln 3 + 2 = 0$$

$$x = \frac{4\ln 3 \pm \sqrt{16(\ln 3)^2 - 8(\ln 3)^2}}{2(\ln 3)^2}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{2}}{\ln 3}$$

Ezekkel az x értékekkel

$$f'(x) = \frac{\frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{\ln 3} - \left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{\ln 3}\right)^2 \ln 3}{\text{pozitív érték}} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2} - (4 + 2 \pm 4\sqrt{2})}{\text{pozitív érték}} \neq 0$$

tehát valóban inflexiós pontok.

MEGADOTT ÖSSZEFÜGGÉS ALKALMAZÁSA

Feladat lehetne

Egy szabályos dobókockával az első hatos dobásig dobunk. Jelölje X a szükséges dobások számát.

(a) Határozza meg a $P(X = 4)$ valószínűséget.

(b) Tudjuk, hogy $0 < x < 1$ esetén $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$.

Bizonyítsa be, hogy X várható értéke 6.

A dobásokat a második hatosig folytatjuk.

(c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a második hatos elérése előtt legalább három nemhatos dobásunk lesz?

MEGADOTT ÖSSZEFÜGGÉS ALKALMAZÁSA

Megoldás

$$(a) \quad P(X = 4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296} (\approx 0.09645).$$

$$(b) \quad E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(X = n) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots\right)$$

$$\text{A megadott összefüggésből} \quad = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{-2}$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = \frac{1}{6} \cdot 6^2 (= 6)$$

MEGADOTT ÖSSZEFÜGGÉS ALKALMAZÁSA

Megoldás

(c) Legyen Y a nem hatos dobások száma.

$$P(Y \geq 3) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)]$$

A hatos (H) és nem hatos (N) dobások lehetséges sorrendjeit tekintve

$$= 1 - [P(HH) + P(HNH \text{ vagy } NHH) + P(HNNH \text{ vagy } NNHH \text{ vagy } HNNH)]$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{36} + \frac{10}{216} + \frac{75}{1296} \right] = 1 - \frac{19}{144} = \frac{125}{144} (\approx 0.868)$$

GRAFIKUS SZÁMOLÓGÉP

Feladat lehetne

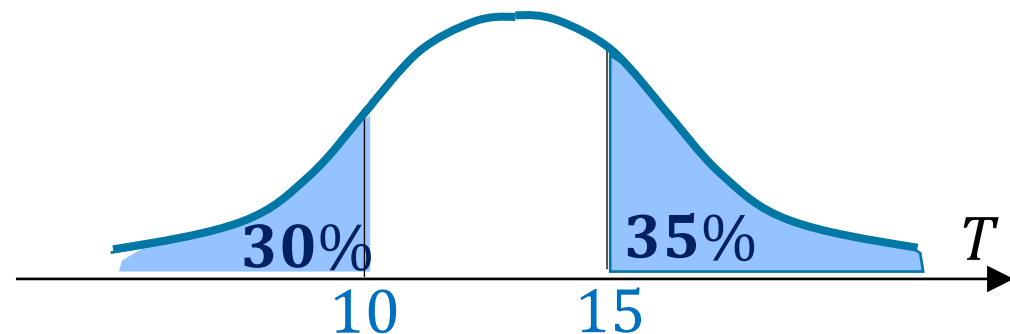
- (a) Egy kisvárosban az esetek 30%-ában 10 percnél kevesebbet kell várni a mentők kiérkezésére, míg az esetek 35%-ában a várakozási idő több, mint 15 perc. A percekben kifejezett T várakozási idő normális eloszlással modellezhető. Határozza meg a T valószínűségi változó átlagát és szórását.

A városi kórház sürgősségi osztályára óránként átlagosan 6 mentőautó érkezik. Az adott idő alatt befutó esetek száma Poisson-eloszlással modellezhető.

- (b) Mi a valószínűsége annak, hogy holnap 16:00 és 18:00 között pontosan 8 beteget hoznak be?
- (c) Ha 16:00 és 18:00 között legalább 10 beteget hoznak, akkor mi a valószínűsége, hogy behozott betegek száma 13?
- (d) Mennyi a valószínűsége, hogy a jövő héten három olyan nap lesz, amikor nem hoznak beteget 16:00 és 16:15 között?

GRAFIKUS SZÁMOLÓGÉP

Megoldás



(a) Ha T eloszlása $N(\mu, \sigma^2)$, akkor $Z = \frac{T - \mu}{\sigma}$ eloszlása $N(0, 1)$.

$$P(T < 10) = 0.3, \quad P(T < 15) = 1 - 0.35 = 0.65$$

$$P\left(Z < \frac{10 - \mu}{\sigma}\right) = 0.3, \quad P\left(Z < \frac{15 - \mu}{\sigma}\right) = 0.65$$

$$\text{invNorm}(0.65, 0, 1) = 0.3853$$

Számológéppel $\frac{10 - \mu}{\sigma} = -0.5244$ $\frac{15 - \mu}{\sigma} = 0.3853$

Az egyenletrendszer megoldása $10 - \mu = -0.5244\sigma$

$$15 - \mu = 0.3853\sigma$$

$$\mu = 12.9, \sigma = 5.50$$

GRAFIKUS SZÁMOLÓGÉP

Megoldás

- (b) A kétórás időtartam alatti X esetszám
 $\lambda = 12$ paraméterű Poisson eloszlást alkot.

$$P(X = 8) = \frac{e^{-12} \cdot 12^8}{8!} = 0.0655$$

- (c) Számológéppel

$$P(X = 13) = 0.1055$$

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 0.7576$$

$$P(X = 13 | X \geq 10) = \frac{P(X = 13)}{P(X \geq 10)} = 0.139$$

GRAFIKUS SZÁMOLÓGÉP

Megoldás

- (d) Negyedórás időtartam alatti X esetszám: $\lambda = 1.5$ paraméterű Poisson.
Nem hoznak beteget:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-1.5} \cdot 12^0}{0!} = e^{-1.5} \approx 0.22313$$

Az ilyen napok N száma egy hét alatt $B(7, 0.22313)$ paraméterű binomiális eloszlást alkot.

$$P(N = 3) = \binom{7}{3} \cdot 0.22313^3 \cdot 0.77687^4 = 0.142$$

GRAFIKUS SZÁMOLÓGÉP

Feladat lehetne

Az A és B pontszerű testek egyszerre indulnak egy egyenes pályán.

A $t = 0$ időpillanatban a két test elmozdulása $s_A = 0$ és $s_B = 5$ m.

Méter per szekundumban kifejezett sebességük a $0 \leq t \leq 9$ intervallumban $v_A = -0.5t^2 + 3t + 1.5$, illetve $v_B = e^{0.2t}$.

- (a) Határozza meg v_A maximális értékét és mutassa meg, hogy valóban maximum.
- (b) Határozza meg a B test gyorsulását a $t = 4$ s időpillanatban.
- (c) Fejezze ki az s_A , illetve s_B elmozdulásokat t függvényében. Ábrázolja az elmozdulásfüggvényeket, és határozza meg azokat a t időpillanatokat, amikor a két test találkozik.

GRAFIKUS SZÁMOLÓGÉP

Megoldás

(a) $v_A = -0.5(t^2 + 6t) + 1.5 = -0.5(t + 3)^2 + 6$
 $-0.5(t + 3)^2 \leq 0$, a sebességnek tehát maximum van: $v_A = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

VAGY

$$\frac{dv_A}{dt} = -t + 3 = 0, t = 3 \text{ s.}$$

$$\frac{d^2v_A}{dt^2} = -1 < 0, \text{ tehát valóban maximum.}$$

(b) $a_B = \frac{dv_B}{dt} = 0.2e^{0.2t}$. Amikor $t = 4$, $a_B = 0.2e^{0.8} = 0.445 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

GRAFIKUS SZÁMOLÓGÉP

Megoldás

(c) integrálással

$$s_A = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + C,$$

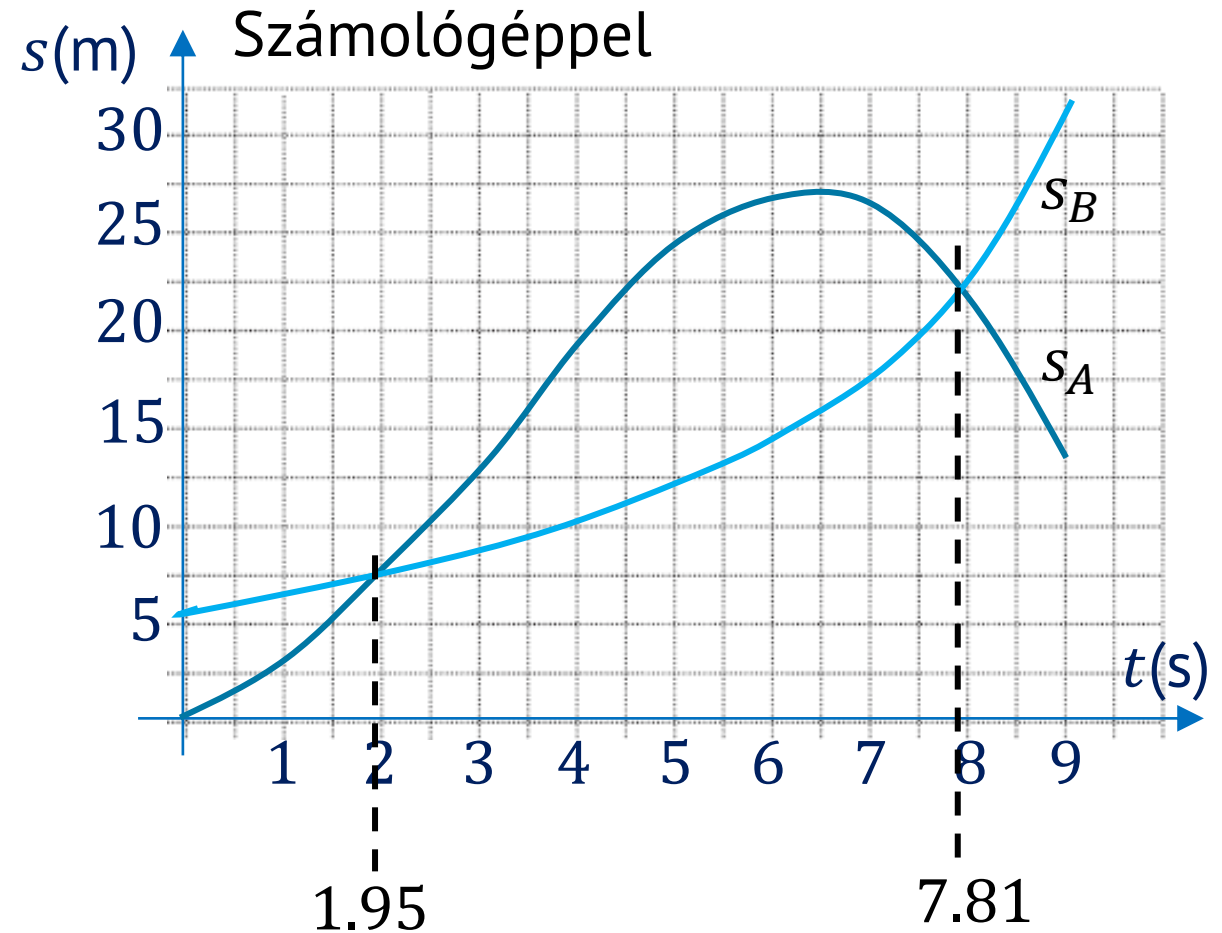
$$t = 0 \text{ esetén } s_A = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$s_B = 5e^{0.2t} + D$$

$$t = 0 \text{ esetén } s_B = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$s_A = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t, s_B = 5e^{0.2t}$$

(d) $t = 1.95$ s és $t = 7.81$ s



A KÖZÉPSZINT IS KOMOLY MATEMATIKA

Feladat lehetne

Tekintsük az $f(x) = 4x - 10$ és $g(x) = x - 3$ ($x \in \mathbb{R}$) függvényeket.

- (a) Adja meg (i) az f^{-1} inverzfüggvény; (ii) a $g^{-1} \circ f$ összetett függvény hozzárendelési utasítását.
- (b) Határozza meg az $(f^{-1} \circ g)(x) = (g^{-1} \circ f)(x)$ egyenlet gyökének pontos értékét.
- (c) Fejezze ki $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \neq 3$ értékét $a + \frac{b}{g(x)}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{R}$.
- (d) Ábrázolja a h függvényt a $[-5, 11]$ intervallumon, és adja meg az aszimptoták egyenletét.
- (e) Számítsa ki $\int_4^6 h(x)dx$ pontos értékét, és a grafikonon satírozza be az integrálnak megfeleltethető területet.

A KÖZÉPSZINT IS KOMOLY MATEMATIKA

Megoldás

$$(a) \quad (i) \quad f^{-1}(x) = \frac{x + 10}{4} \quad (ii) \quad g^{-1}(x) = x + 3,$$

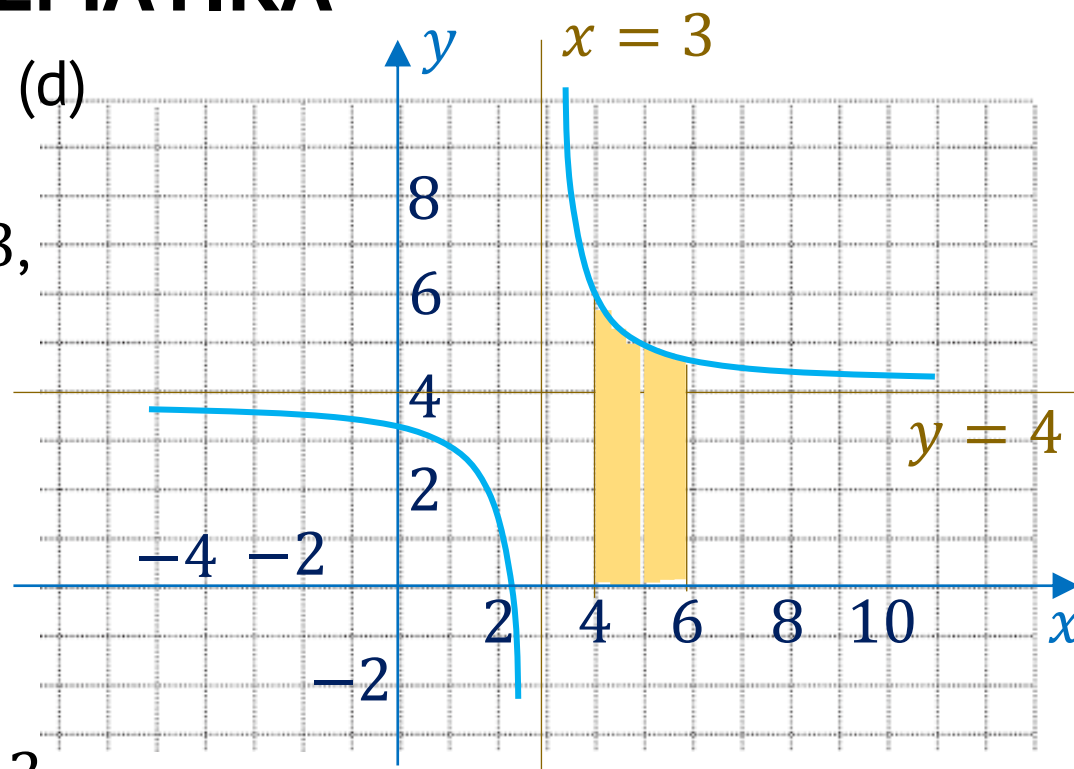
$$(g^{-1} \circ f)(x) = 4x - 10 + 3 = 4x - 7$$

$$(b) \quad (f^{-1} \circ g)(x) = \frac{(x - 3) + 10}{4} = \frac{x + 7}{4}$$

$$\frac{x + 7}{4} = 4x - 7, \text{ ahonnan } x = \frac{7}{3}$$

$$(c) \quad h(x) = \frac{4x - 10}{x - 3} = \frac{4x - 12 + 2}{x - 3} = 4 + \frac{2}{x - 3}$$

$$(e) \quad \int_4^6 \left(4 + \frac{2}{x - 3} \right) dx = [4x + 2\ln|x - 3|]_4^6 = 24 + 2\ln 3 - 16 - 2\ln 1 = 8 + 2\ln 3$$



A KÖZÉPSZINT IS KOMOLY MATEMATIKA

Feladat lehetne

A strand büféjében árulnak lángost és főtt kukoricát is. Definiáljuk az alábbi eseményeket:

K: egy véletlenszerűen kiválasztott vásárló vesz főtt kukoricát;

L: vesz lángost;

N: nem vesz egyiket sem.

Tudjuk, hogy $P(K) = 0.31$, $P(L) = 0.62$, $P(N) = 0.14$.

(a) Mutassa meg, hogy $P(K \cap L) = 0.07$.

(b) Ha egy vásárló vesz lángost, mennyi a valószínűsége, hogy kukoricát is vesz?

(c) Függetlenek-e a K és L események? Válaszát indokolja!

folytatása következik

A KÖZÉPSZINT IS KOMOLY MATEMATIKA

Megoldás

$$P(K) = 0.31, P(L) = 0.62, P(N) = 0.14.$$

$$(a) P(K \cup L) = 1 - 0.14 = 0.86$$

$$P(K \cup L) = P(K) + P(L) - P(K \cap L)$$

$$0.86 = 0.31 + 0.62 - P(K \cap L)$$

$$\text{Ebből } P(K \cap L) = 0.07.$$

$$(b) P(K|L) = \frac{P(K \cap L)}{P(L)} = \frac{0.07}{0.62} = \frac{7}{62} (\approx 0.113)$$

$$(c) \text{ Nem függetlenek: } P(K|L) \neq P(K)$$

$$\text{vagy: } P(K \cap L) = 0.07 \neq P(K) \cdot P(L) \approx 0.192$$

folytatása következik

A KÖZÉPSZINT IS KOMOLY MATEMATIKA

Feladat lehetne

A vásárcsarnok büféjében szintén árulnak kukoricát és lángost is. Ebben a büfében a kukorica- és lángosvásárlás **független események**.

Tudjuk továbbá, hogy itt is $P(N) = 0.14$, és itt is kétszer annyi vásárló vesz lángost, mint kukoricát.

(d) Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott vásárló vesz kukoricát?

A KÖZÉPSZINT IS KOMOLY MATEMATIKA

Megoldás

(d) $P(N) = 0.14, P(K) = p, P(L) = 2p$

K és L függetlenek: $P(K \cap L) = P(K) \cdot P(L) = 2p^2$

$$P(K \cup L) = P(K) + P(L) - P(K \cap L)$$

$$0.86 = p + 2p - 2p^2$$

$$2p^2 - 3p + 0.86 = 0$$

$$p = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 0.86}}{4} = \begin{cases} 1.11 \\ 0.386 \end{cases}$$

$$p = 0.386$$

Köszönöm a figyelmet!