



PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar



Katolikus
Pedagógiai
Intézet

Középiskolai matematikatanárok szaktárgyi továbbképzése

2021. november 12.



PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar

Térgeometriai feladatok GeoGebra programmal szemléltetve

2021. November 12.

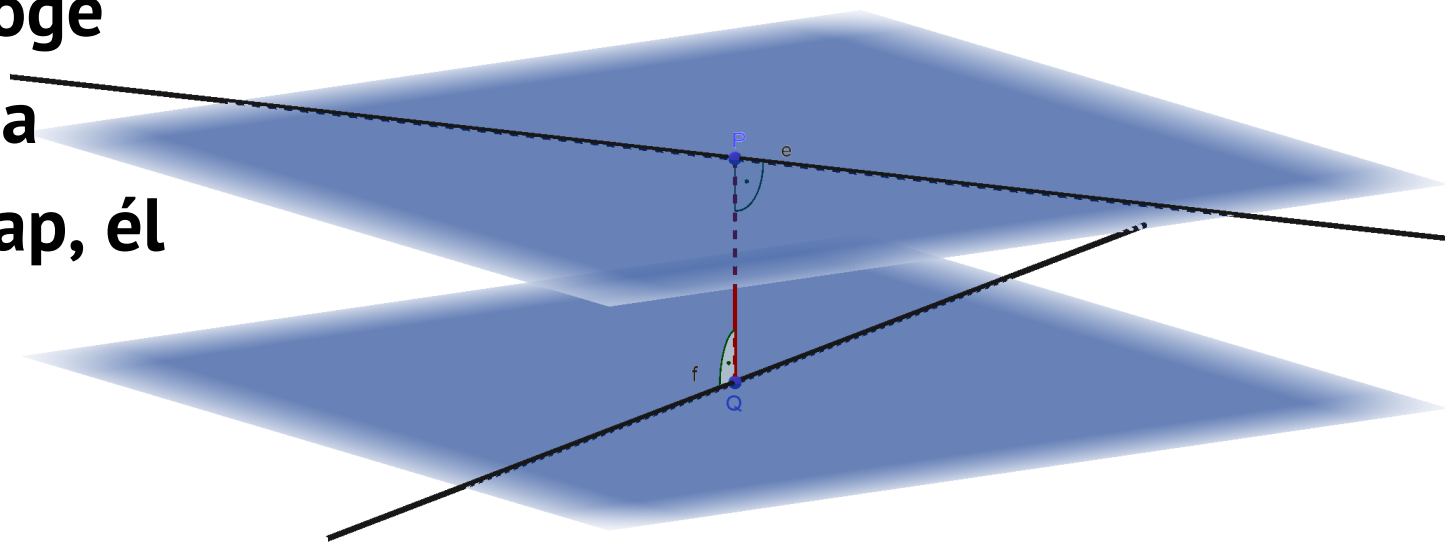
Horváth Eszter

Kempelen Farkas Gimnázium Budapest

TÉRGEOMETRIA A 12. ÉVFOLYAMON

Fejlesztjük a térszemléletet

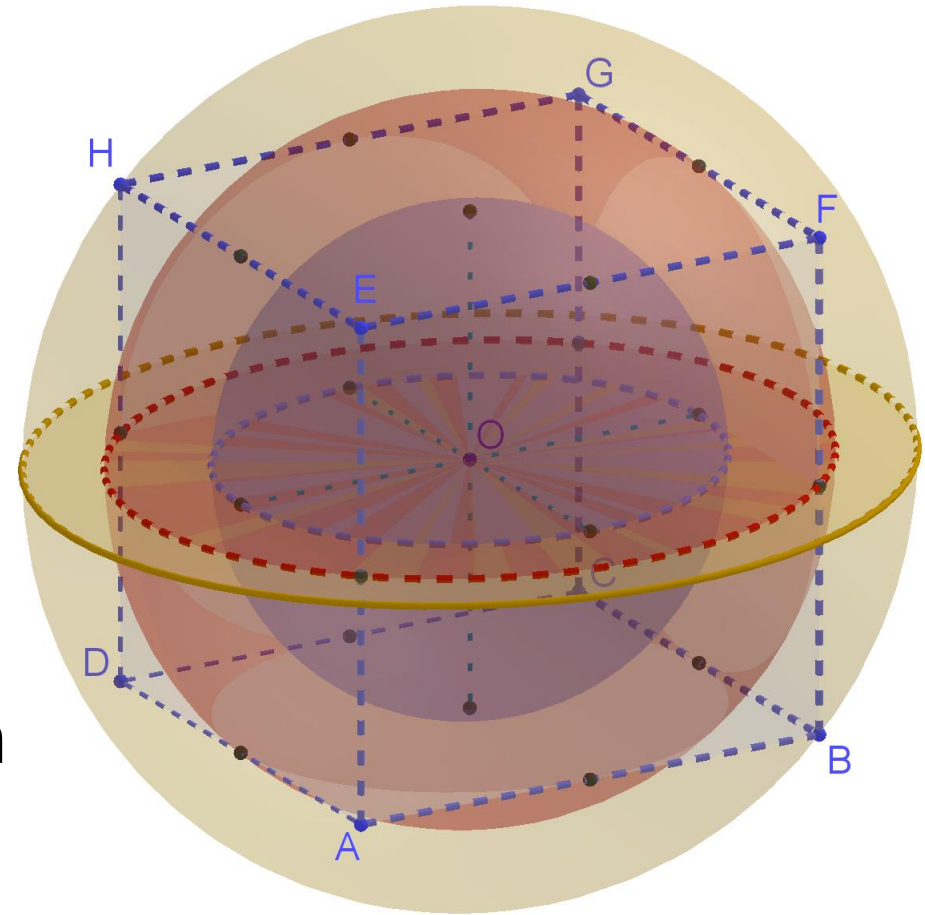
1. Térelemek kölcsönös helyzete
2. Térelemek hajlásszöge
3. Térelemek távolsága
4. Poliéderek -csúcs, lap, él
5. Szabályos testek



TÉRGEOMETRIA A 12. ÉVFOLYAMON

Fejlesztjük a térszemléletet

- 6. Hasáb, henger
- 7. Gúla, kúp, csonka gúla, csonka kúp
- 8. Gömb
- 9. Egymásba írt testek
- 10. Térfogat, felszín
 - az előző témákkal párhuzamosan



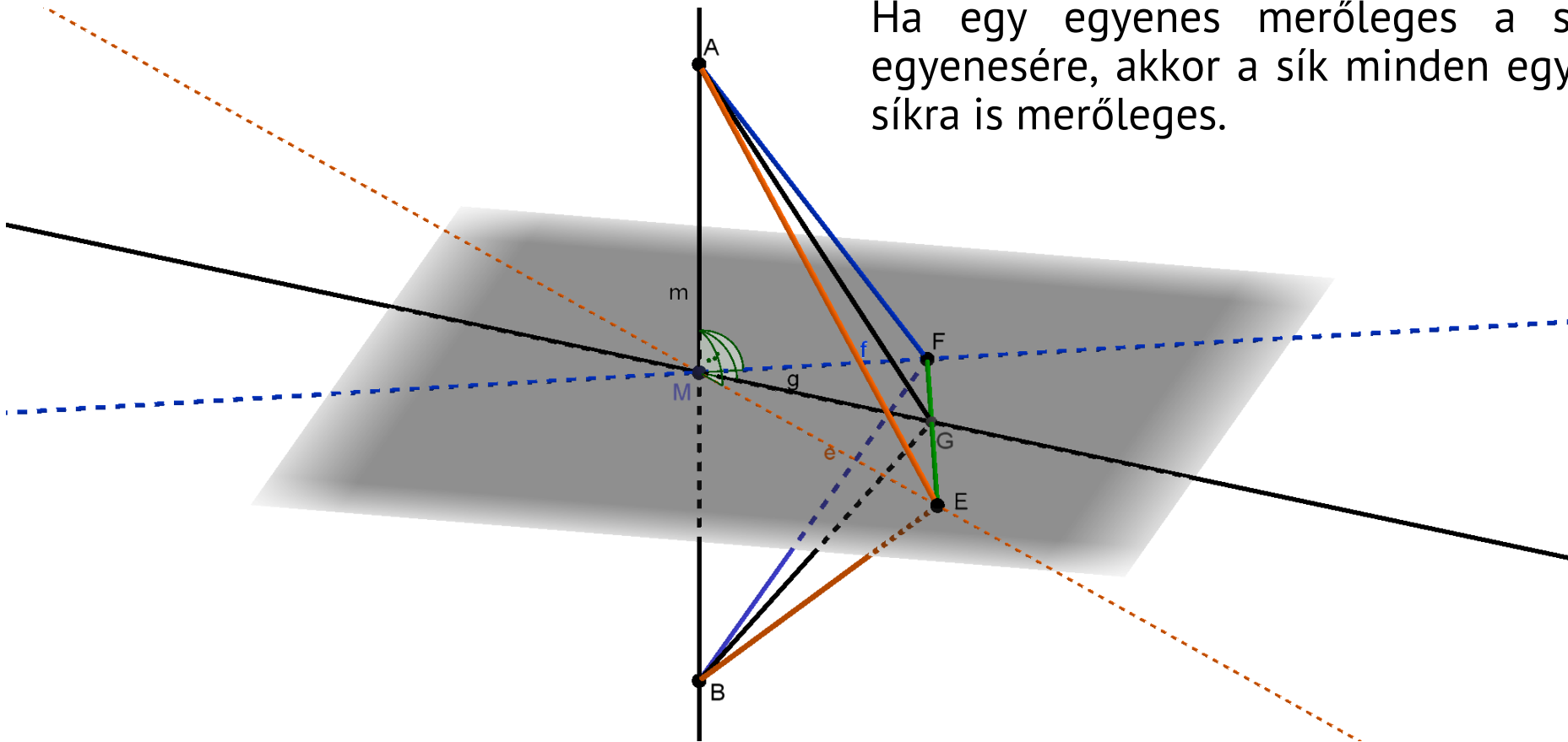
AZ ELŐADÁS CÉLJA

- Merjünk 2-dimenzióból 3-dimenzióba lépni!
- Fontos térgeometriai fogalmak megerősítése szemléltetéssel
- A program lehetőségei a gyakorlatban
- Nem a tananyag teljes feldolgozását adom 45 percben. CSAK kedvet szeretnék csinálni a használatához.

ALAPOK

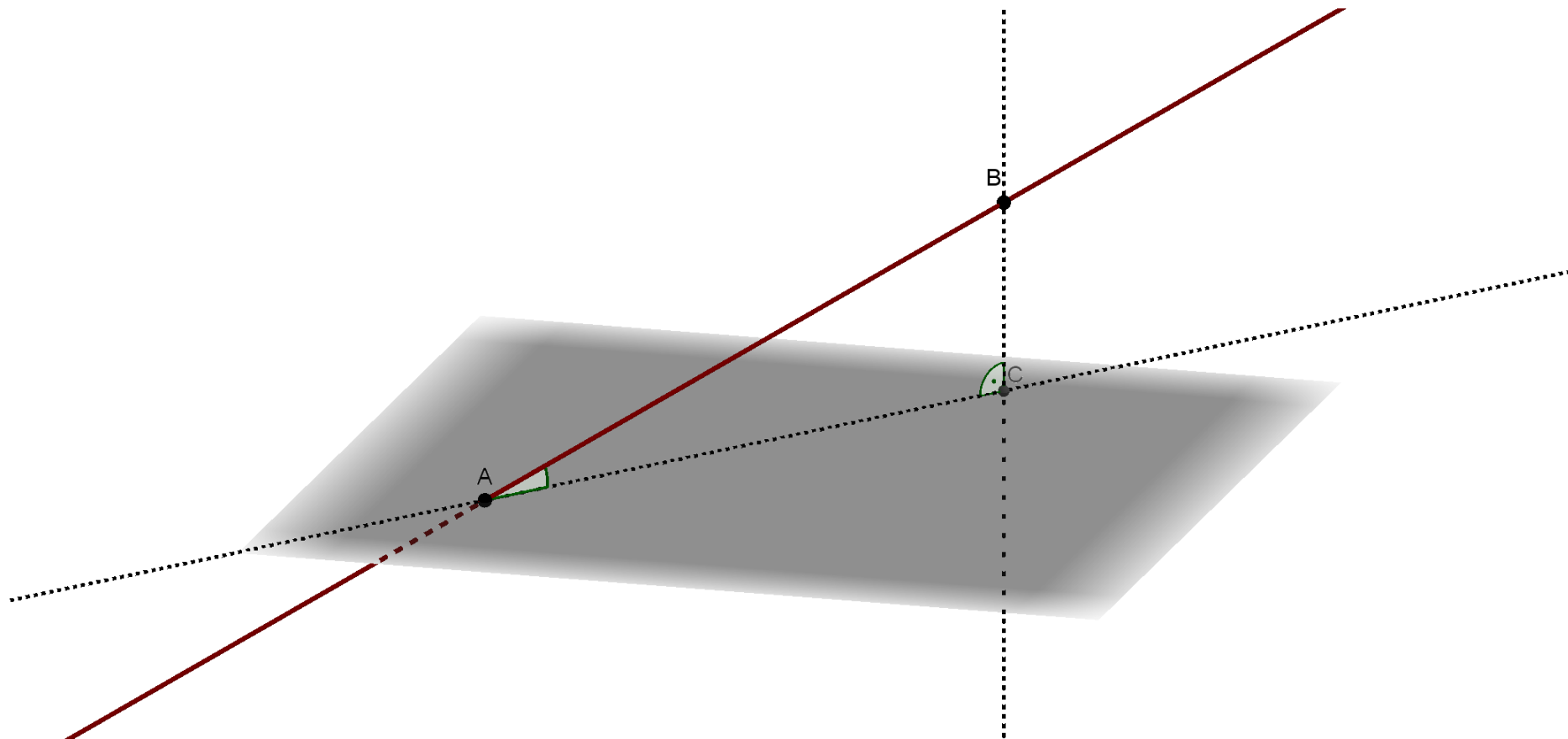
A síkra merőleges egyenes tétele

Ha egy egyenes merőleges a sík két metsző egyenesére, akkor a sík minden egyenesére, azaz a síkra is merőleges.



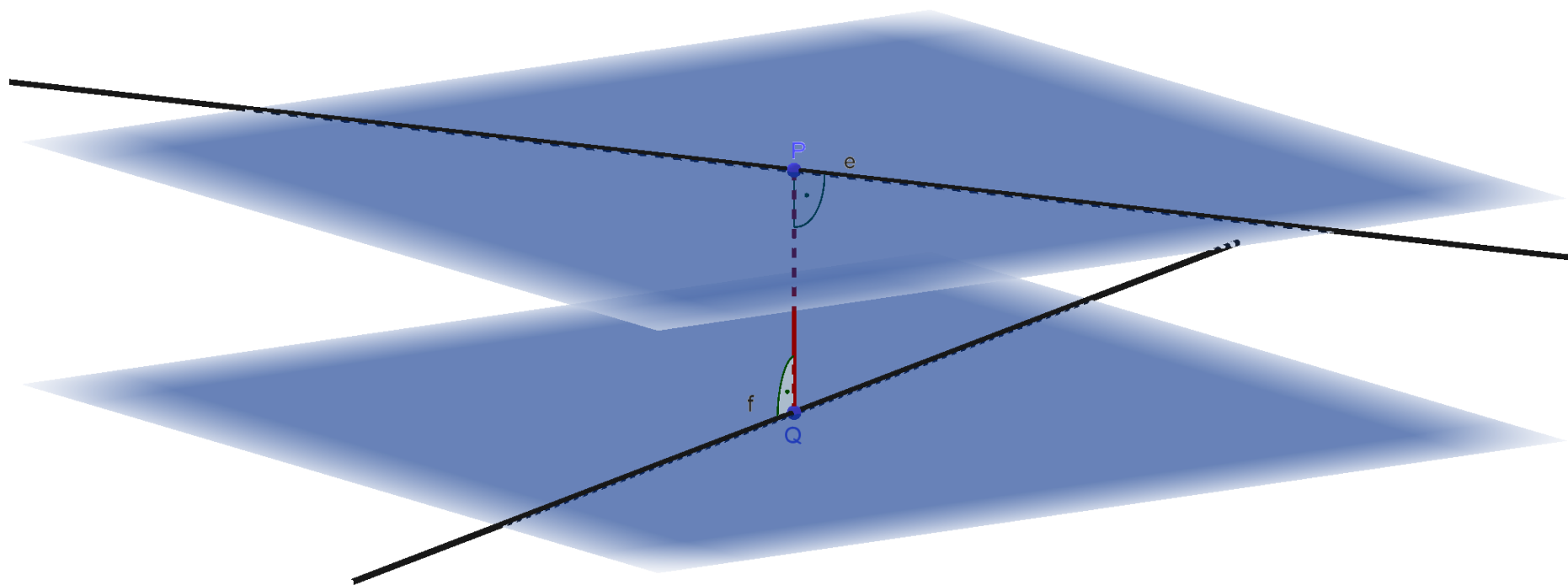
ALAPOK

Egyenes és sík szöge



ALAPOK

Kitérő egyenesek távolsága



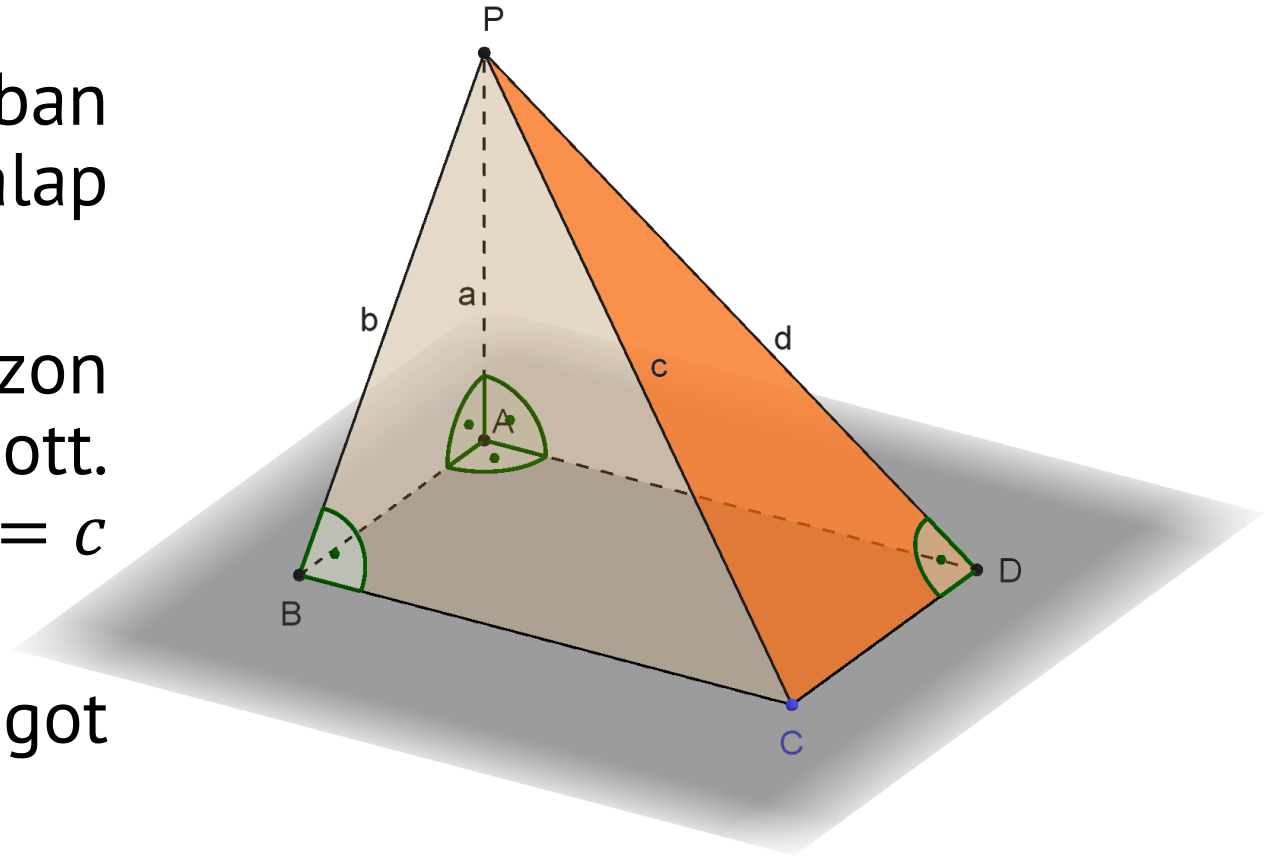
ALKALMAZZUK!

Feladatgyűjtemény 1615

Egy $ABCD$ téglalap A csúcsában állítsunk merőlegest a téglalap síkjára.

Legyen a P pont a merőleges azon pontja, amelyre $PA = a$ adott. Adott még a $PB = b$ és $PC = c$ távolság.

Határozzuk meg a PD távolságot és a téglalap méreteit.



ALKALMAZZUK!

Feladatgyűjtemény 1615

ABP háromszögből:

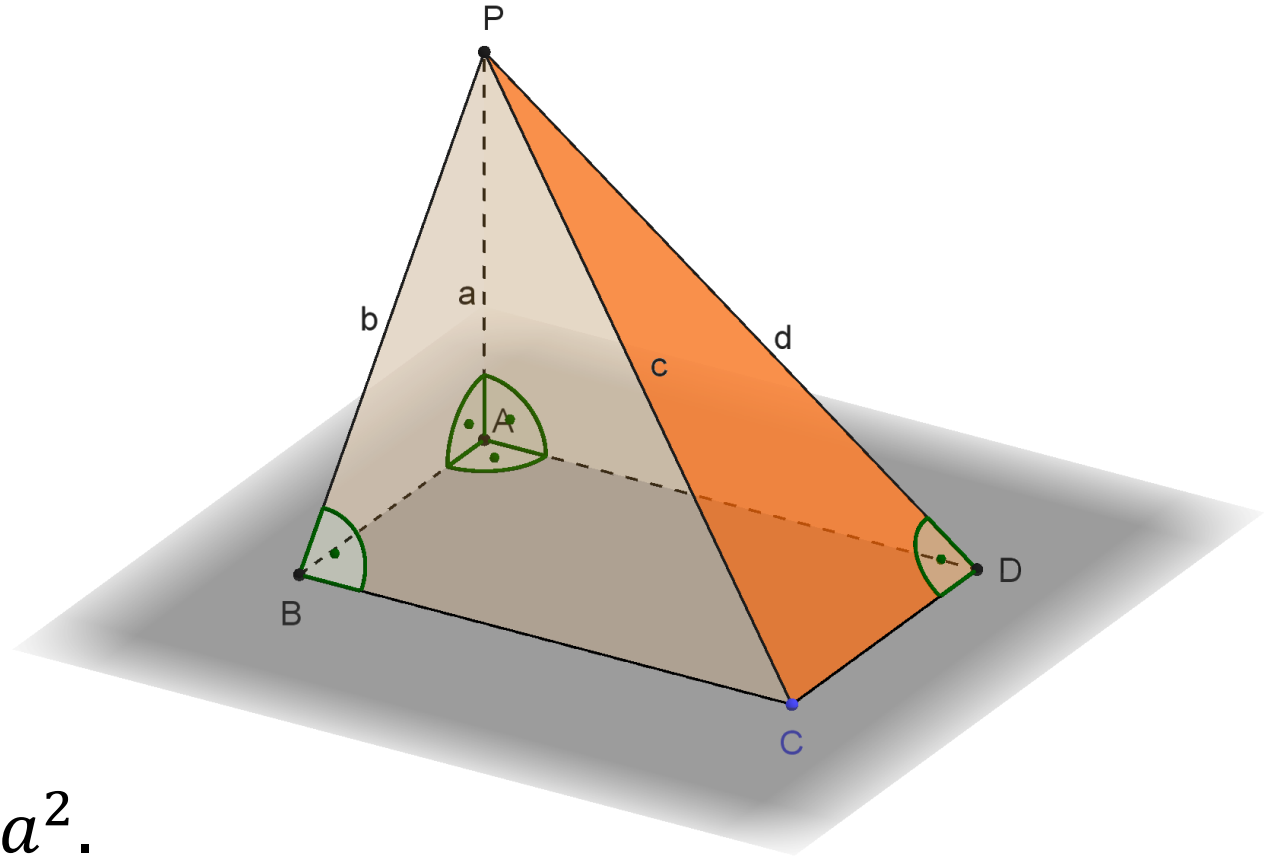
$$AB^2 = CD^2 = b^2 - a^2.$$

BCP háromszögből:

$$BC^2 = AD^2 = c^2 - b^2$$

CDP háromszögből:

$$d^2 = c^2 - CD^2 = c^2 - b^2 + a^2.$$

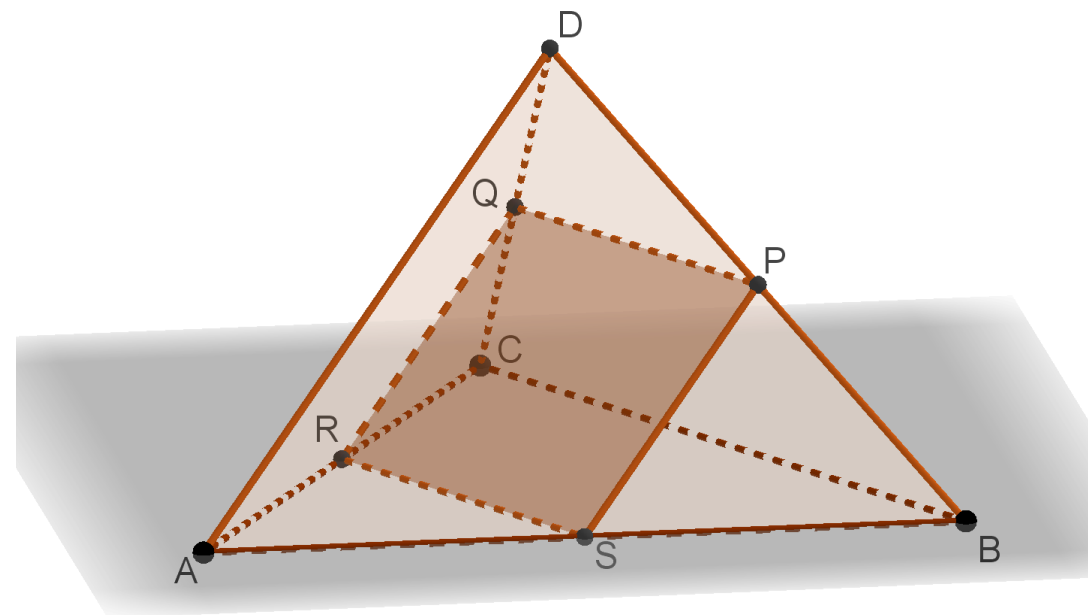


ÉRETTSÉGI FELADATOK

KöMal próbaérettségi feladatsorból

Az ABC szabályos háromszög alapú, D csúcsú gúla alapélei 18, oldalélei $6\sqrt{6}$ hosszúak. Fektesünk az AD éllel párhuzamos síkot az AB és AC élek felezőpontjain át.

- Számítsuk ki a síkmetszet területét.
- Mekkora szöget zár be a metsző sík az alapsíkkal?



ÉRETTSÉGI FELADATOK

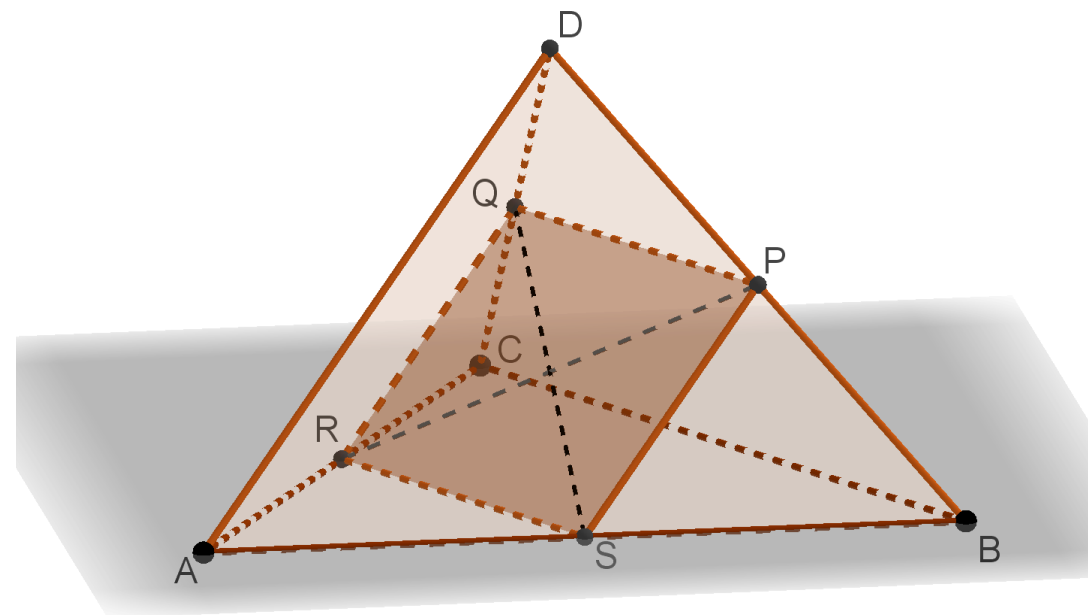
KöMal próbaérettségi feladatsorból

- A $PQRS$ sík párhuzamos AD -vel, ezért SP az ABD háromszög, RQ az ACD háromszög középvonala.

$$RQ = SP = \frac{1}{2}AD = 3\sqrt{6}$$

- QP a BCD háromszög, RS az ABC háromszög középvonala.

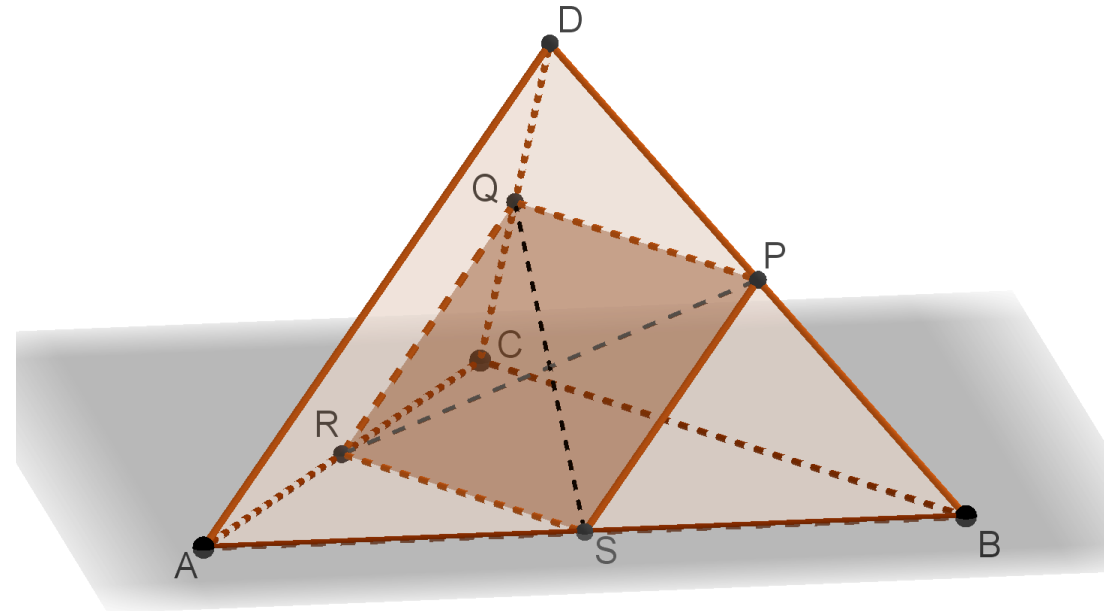
$$QP = RS = \frac{1}{2}BC = 9$$



ÉRETTSÉGI FELADATOK

KöMal próbaérettségi feladatsorból

- $RP = QS$ a szimmetrikus szerep miatt.
- A $PQRS$ négyszög olyan paralelogramma, amelynek az átlói egyenlőek. Tehát ez a négyszög téglalap.
- A téglalap területe
$$T = 9 \cdot 3\sqrt{6} = 27\sqrt{6}$$



ÉRETTSÉGI FELADATOK

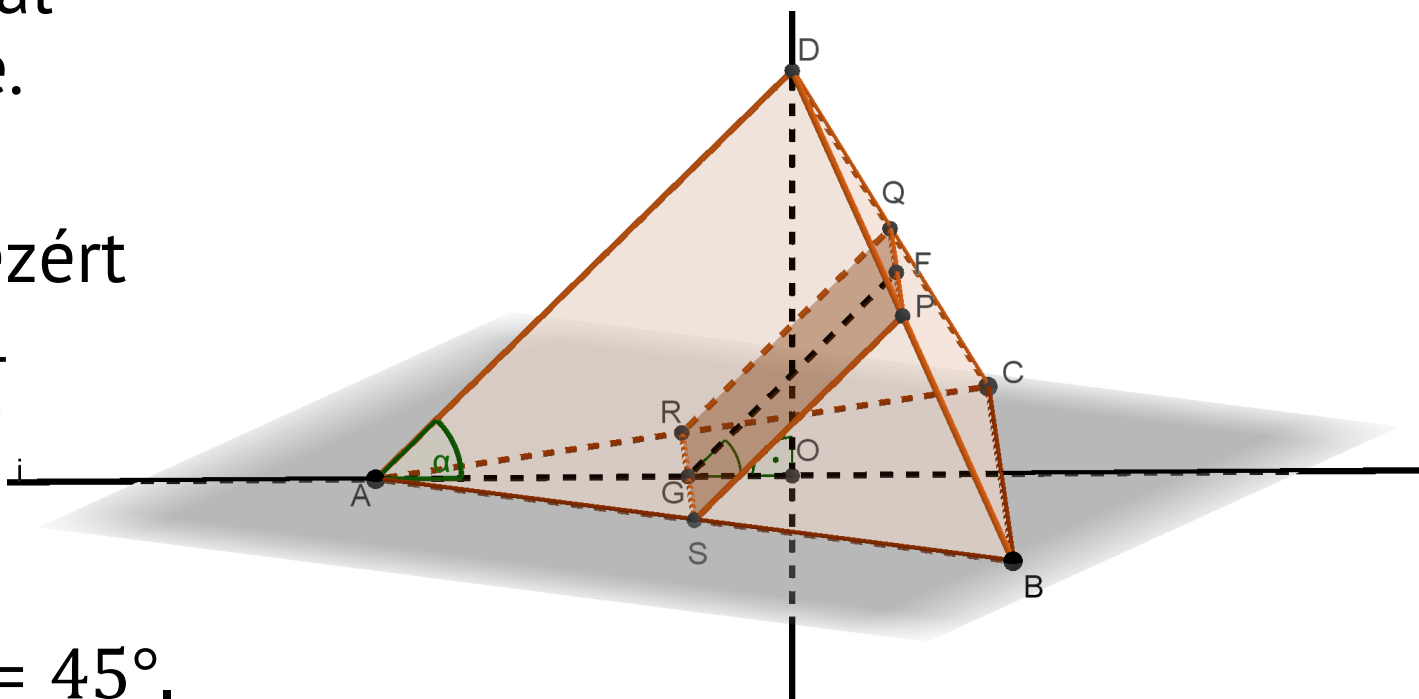
KöMal próbaérettségi feladatsorból

- AD párhuzamos az $SPQR$ síkkal, ezért az alaplappal azonos szöget zárnak be.
- O az ABC szabályos háromszög súlypontja, ezért

$$AO = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

- A hajlásszög koszinusa

$$\cos \alpha = \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ azaz } \alpha = 45^\circ.$$



ÉRETTSÉGI FELADATOK

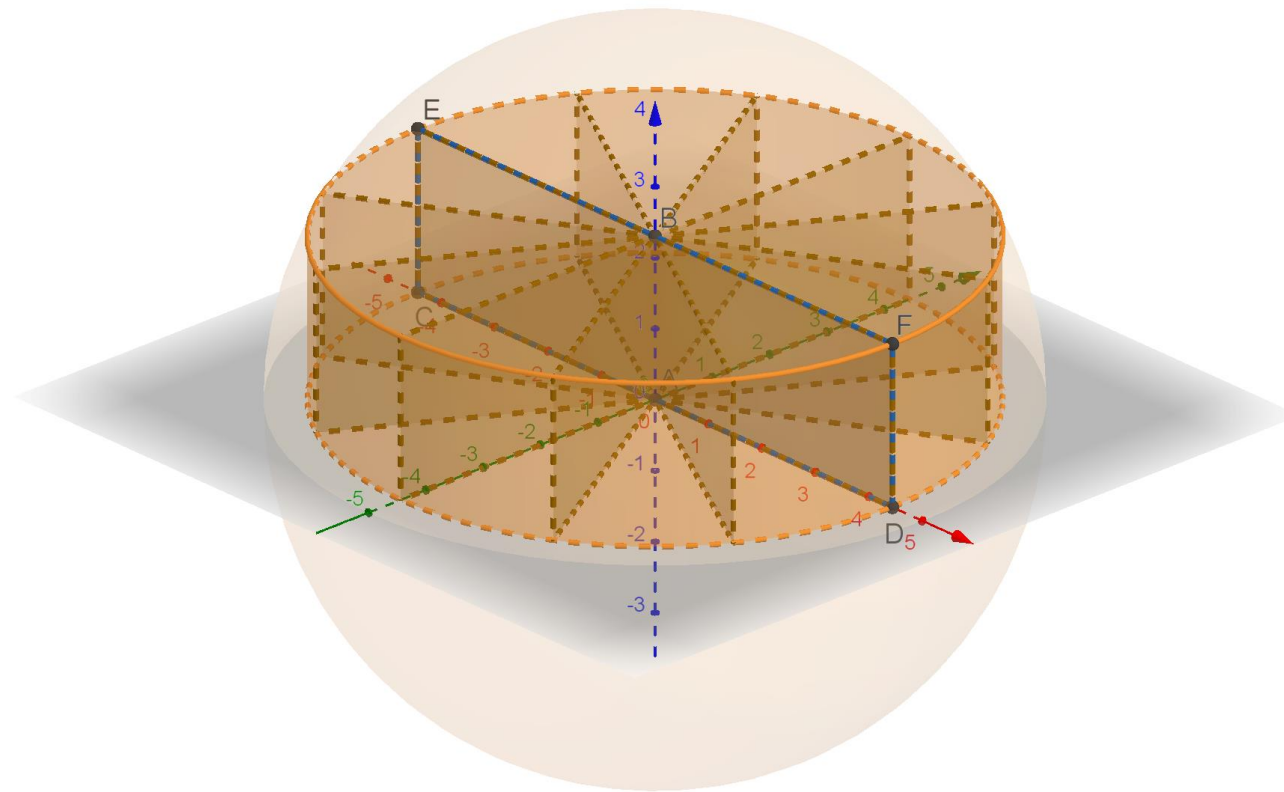
Emelt szintű érettségi feladat 2021. október 19.

Egy forgáshenger alakú tortát egy 15 cm sugarú, félgömb alakú védőbúra alatt helyezünk el. A torta a félgömb határoló körének síkján áll, és a torta fedőlapjának határoló köre a félgömbre illeszkedik (az ábra szerint).

- a) Igazolja, hogy az m cm magasságú torta térfogata (köbcentiméterben mérve) $225\pi m - \pi m^3$ ($0 < m < 15$).
- b) Igazolja, hogy a védőbúra alatt (a fent leírt módon) elhelyezhető maximális térfogatú torta térfogata kisebb, mint a félgömb térfogatának 60%-a!

EGYMÁSBA ÍRT TESTEK

Emelt szintű érettségi feladat 2021. október 19.

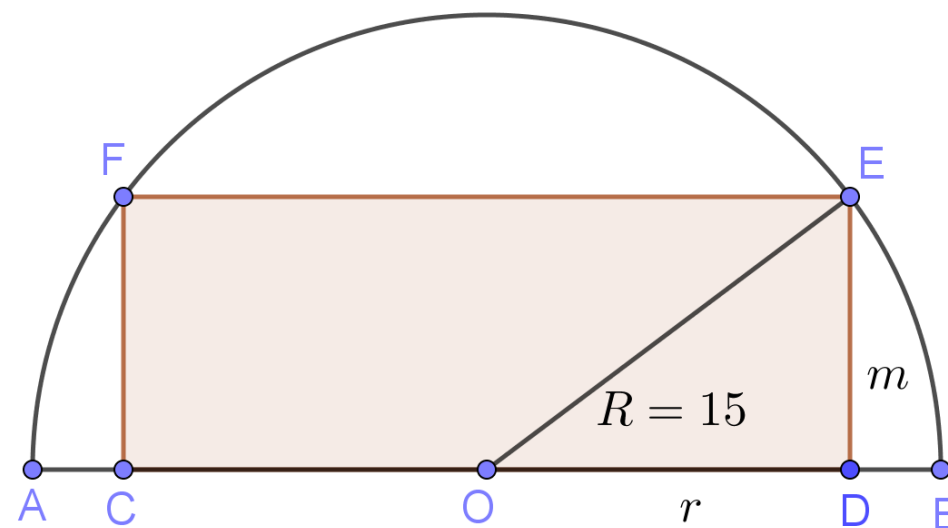


EGYMÁSBA ÍRT TESTEK

Emelt szintű érettségi feladat 2021. október 19.

- $r^2 = 15^2 - m^2$
- A henger térfogata:
 $V(m) = r^2 \pi m = 225\pi m - \pi m^3$
 $0 < m < 15$
- $V'(m) = 225\pi - 3m^2\pi = 0$
 $m^2 = 75$
 $m = 5\sqrt{3}$

$V''(m) = -6m\pi < 0,$
valóban maximum.



EGYMÁSBA ÍRT TESTEK

Emelt szintű érettségi feladat 2021. október 19.

- A maximális térfogatú henger adatai:

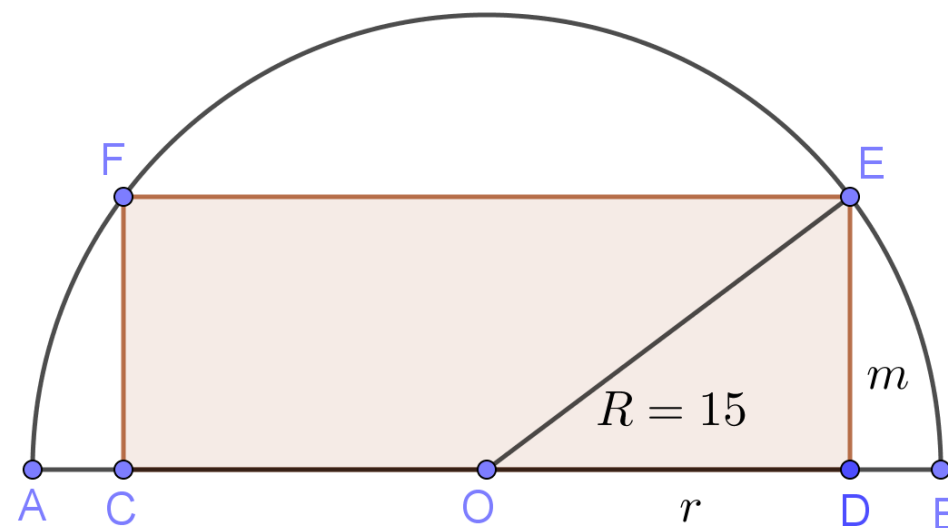
$$m = 5\sqrt{3} \approx 8,66(\text{cm})$$

$$r^2 = 15^2 - m^2$$

$$r^2 = 225 - 75 = 150$$

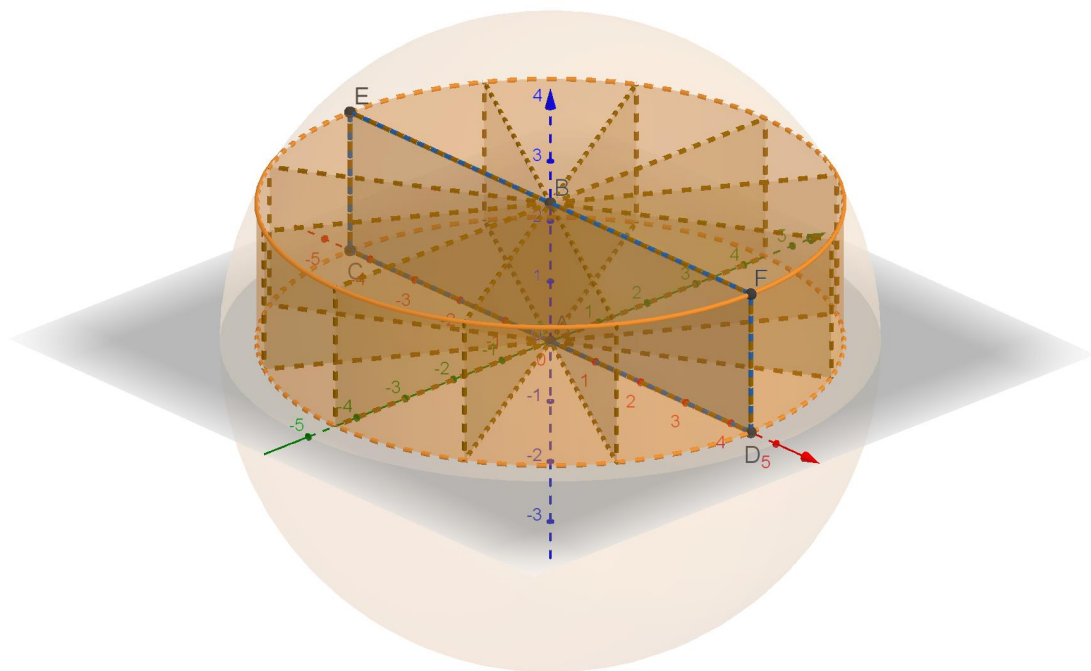
$$r = \sqrt{150} = 5\sqrt{6} \approx 12,25(\text{cm})$$

$$V = r^2 \pi \cdot m = 750\sqrt{3}\pi \approx 4081(\text{cm}^3)$$



EGYMÁSBA ÍRT TESTEK

Emelt szintű érettségi feladat 2021. október 19.



- A félgömb térfogata:

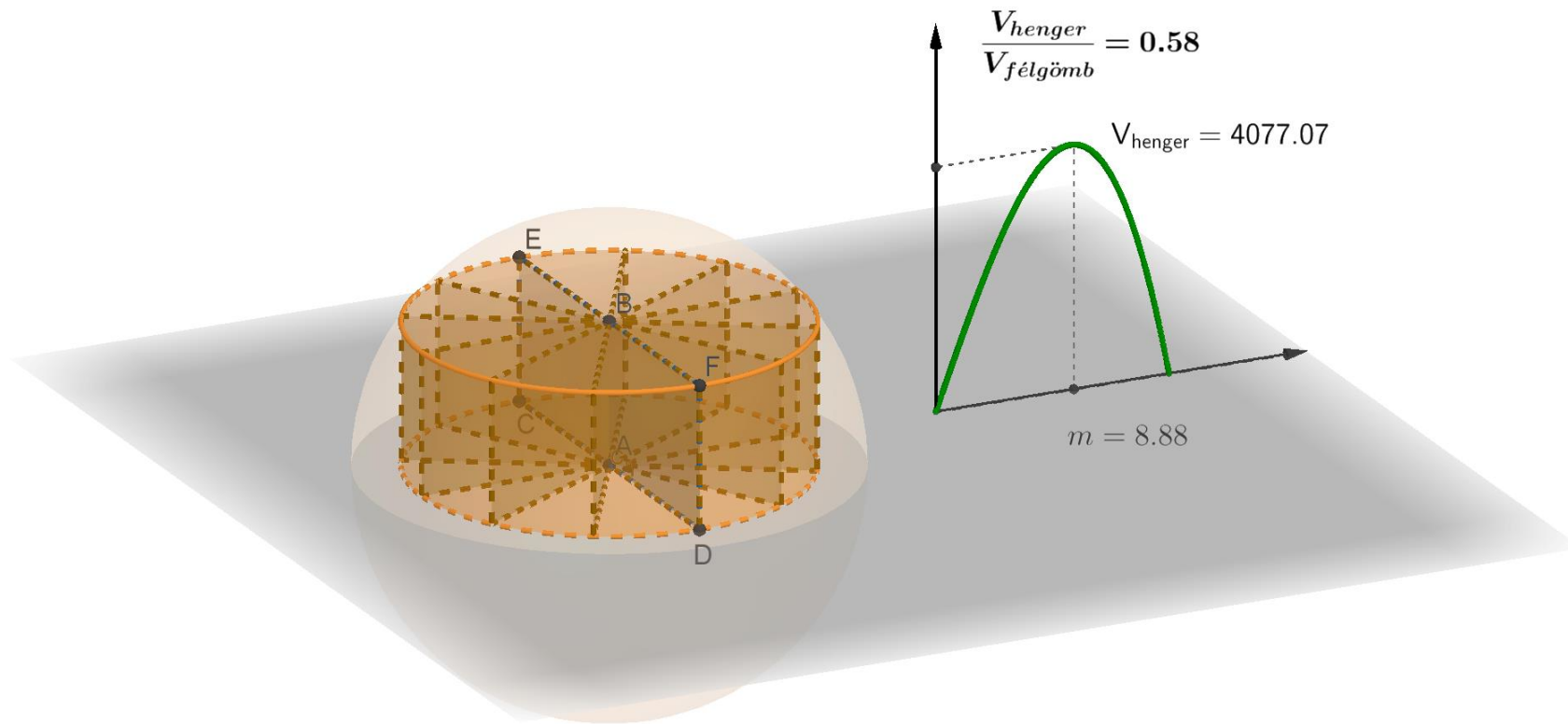
$$V = \frac{4 \cdot 15^3 \pi}{6} \approx 2250\pi \approx 7069(cm^3)$$

- **A torta és a félgömb térfogatának az aránya:**

$$\frac{750\sqrt{3}\pi}{2250\pi} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58 < 60\%$$

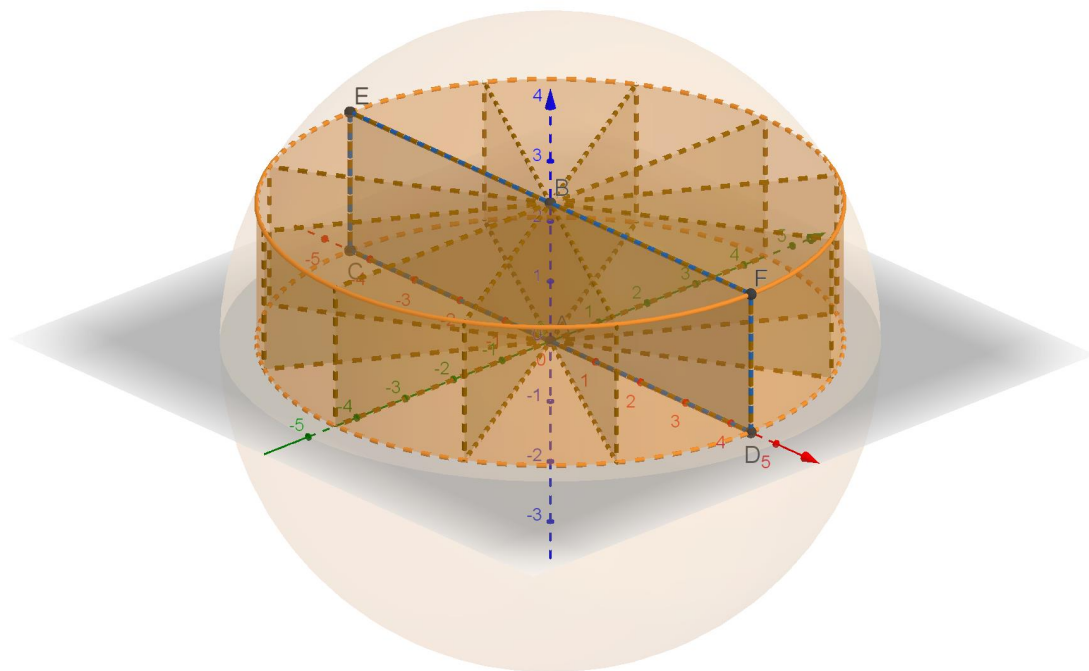
EGYMÁSBA ÍRT TESTEK

Emelt szintű érettségi feladat 2021. október 19.



EGYMÁSBA ÍRT TESTEK

Emelt szintű érettségi feladat 2021. október 19.



Új kérdések is lehetnek:

- Milyen magas torta esetén lesz legnagyobb a vágási felület?
- Szokás a tortaszeleteket műanyag fóliával csomagolni. Milyen magasság esetén kell a legtöbb anyag ehhez?

MIKOR LESZ MAXIMÁLIS A METSZET?

Emelt szintű érettségi feladat 2021. október 19.

A vágás területe:

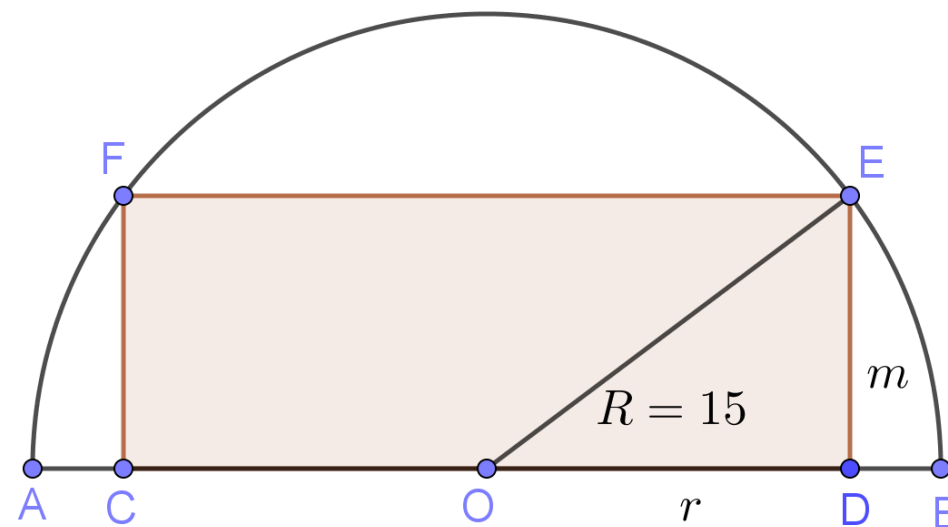
$$T(m) = m \cdot 2r = 2m\sqrt{225 - m^2}$$
$$0 < m < 15$$

Ennek a függvénynek ugyanott van a szélsőértéke, mint az

$$f(m) = m^2(225 - m^2)$$

függvénynek.

$$f'(m) = 450m - 4m^3 =$$
$$= m \cdot (450 - 4m^2)$$



MIKOR LESZ MAXIMÁLIS A METSZET?

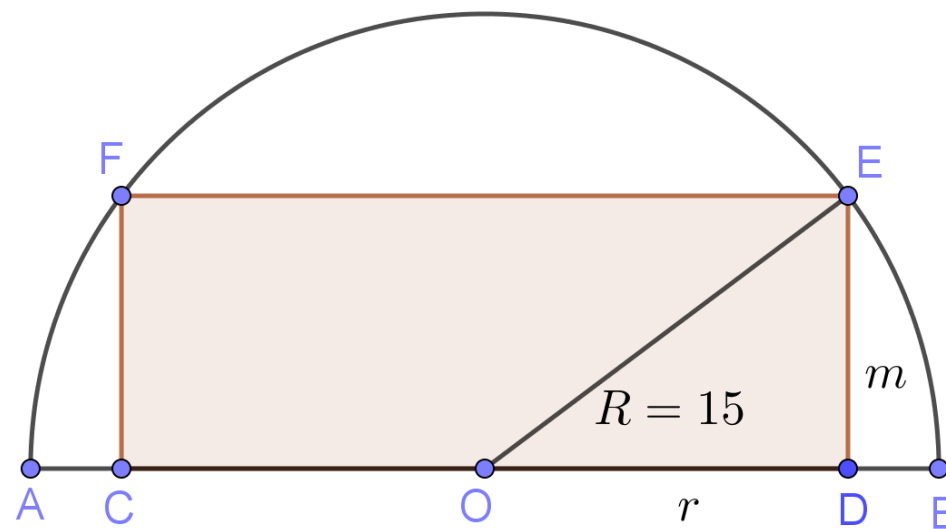
Emelt szintű érettségi feladat 2021. október 19.

$$\begin{aligned} f'(m) &= 450m - 4m^3 = \\ &= m \cdot (450 - 4m^2) = 0 \end{aligned}$$

A $0 < m < 15$ feltétel mellett

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{450}{4}} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx \\ &\approx 10,61(\text{cm}) \end{aligned}$$

Ekkor valóban maximum van.

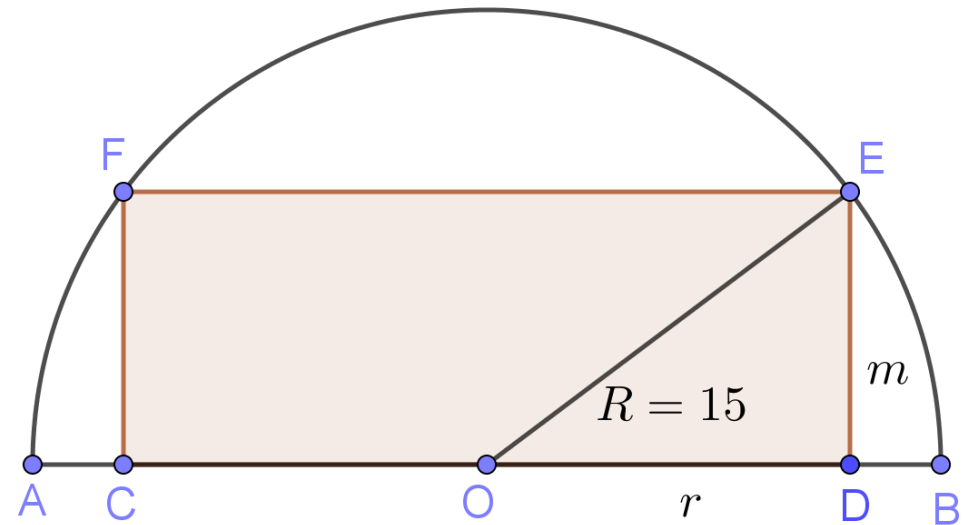


MIKOR LESZ MAXIMÁLIS A METSZET?

Emelt szintű érettségi feladat 2021. október 19.

A maximális metszet:

$$\begin{aligned} T &= 15\sqrt{2} \cdot \sqrt{225 - \frac{450}{4}} = \\ &= 15\sqrt{2} \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2} = 225 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$



MIKOR LESZ MAXIMÁLIS A CSOMAGOLÁS?

Emelt szintű érettségi feladat 2021. október 19.

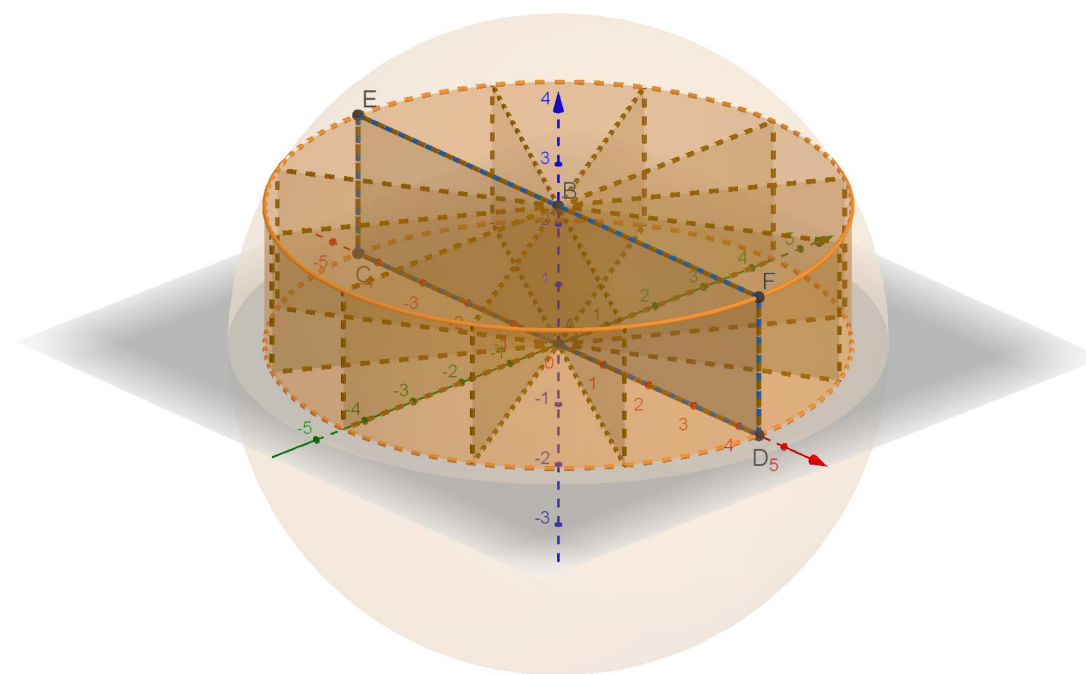
12 szeletes torta:

metszetek + kerület:

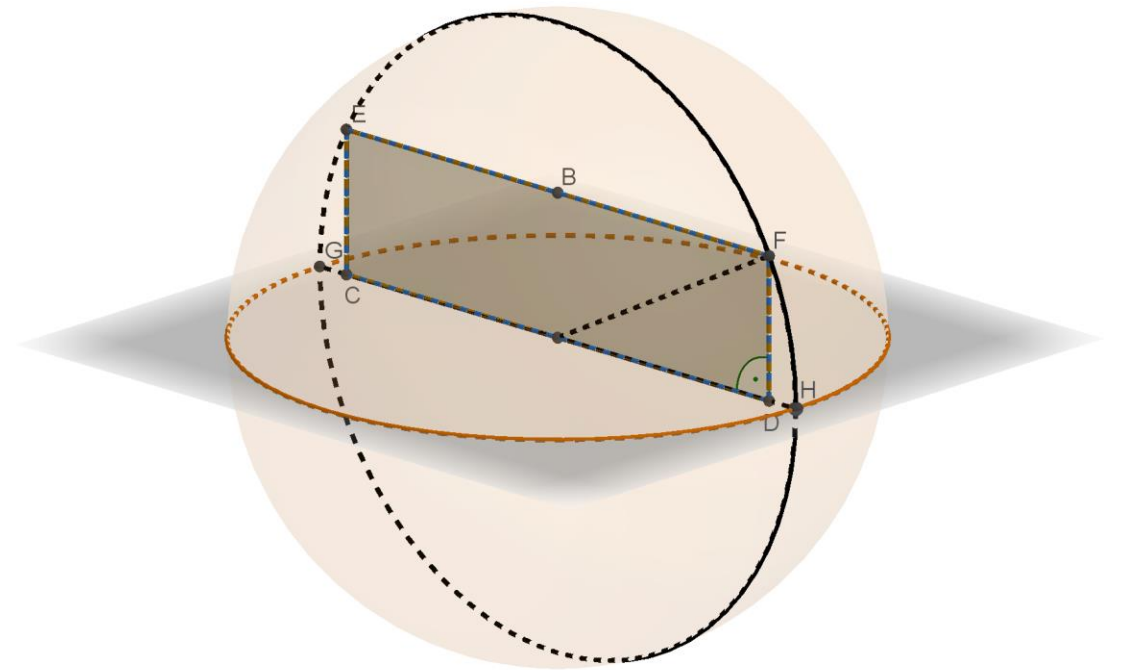
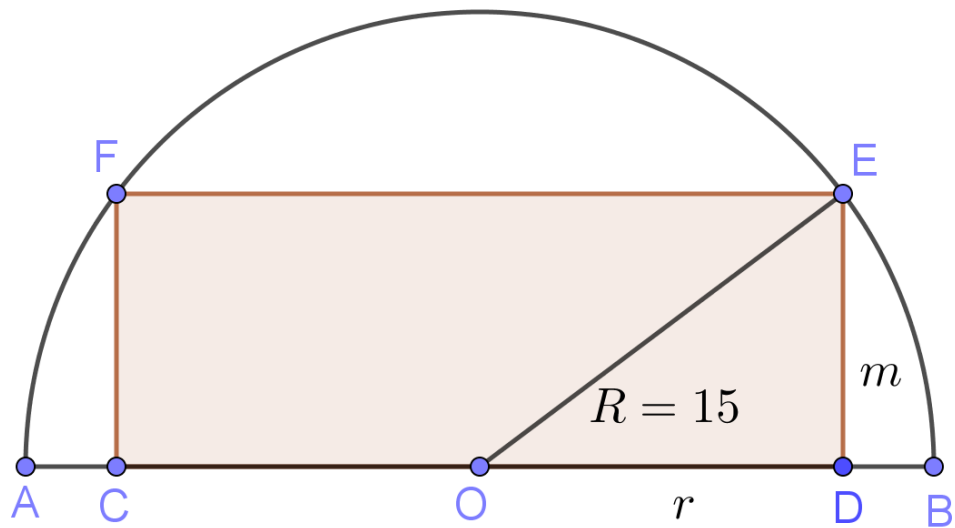
$$\begin{aligned} A(m) &= 12 \cdot 2rm + 2r\pi \cdot m = \\ &= (24 + 2\pi) \cdot m\sqrt{225 - m^2} \end{aligned}$$

Ez a függvény arányos a $T(m)$ függvénnyel, ezért maximum-helye ugyanaz lesz,

$$m = \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 10,61(\text{cm}).$$

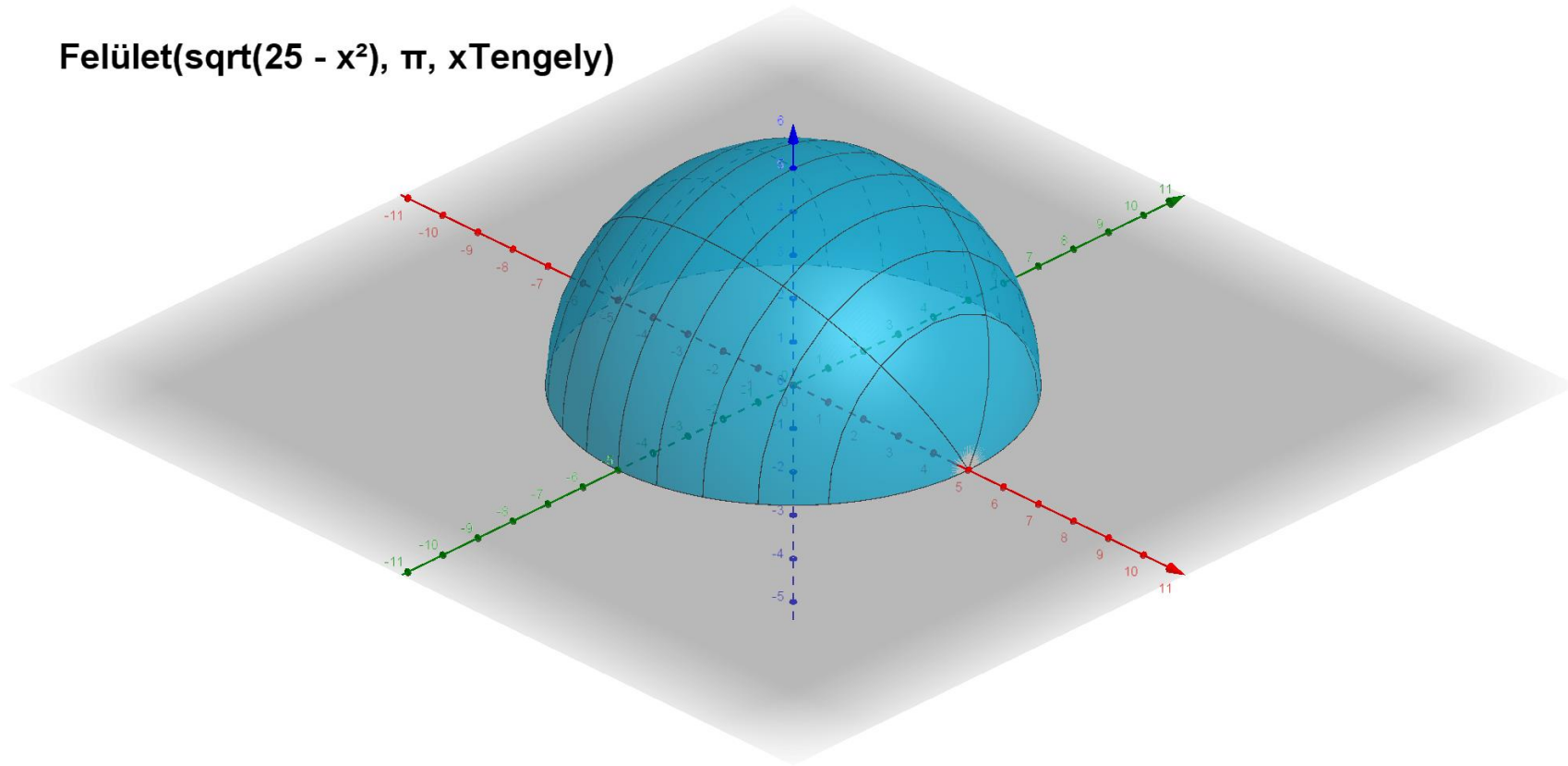


HOGYAN LÁTSZIK EZ TÉRBEN?

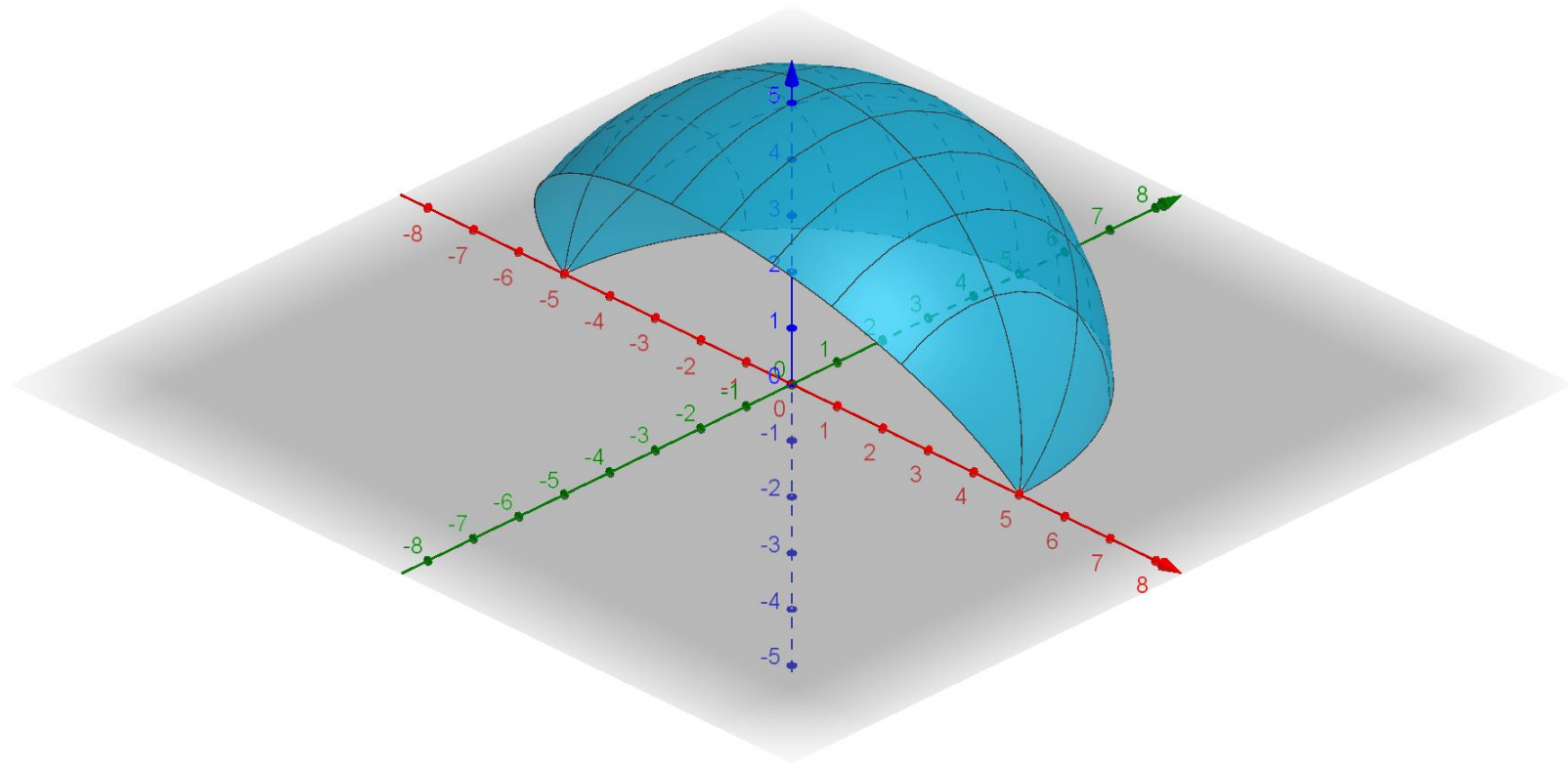


TUDUNK-E FÉLGÖMBÖT RAJZOLNI?

Felület($\sqrt{25 - x^2}$, π , xTengely)

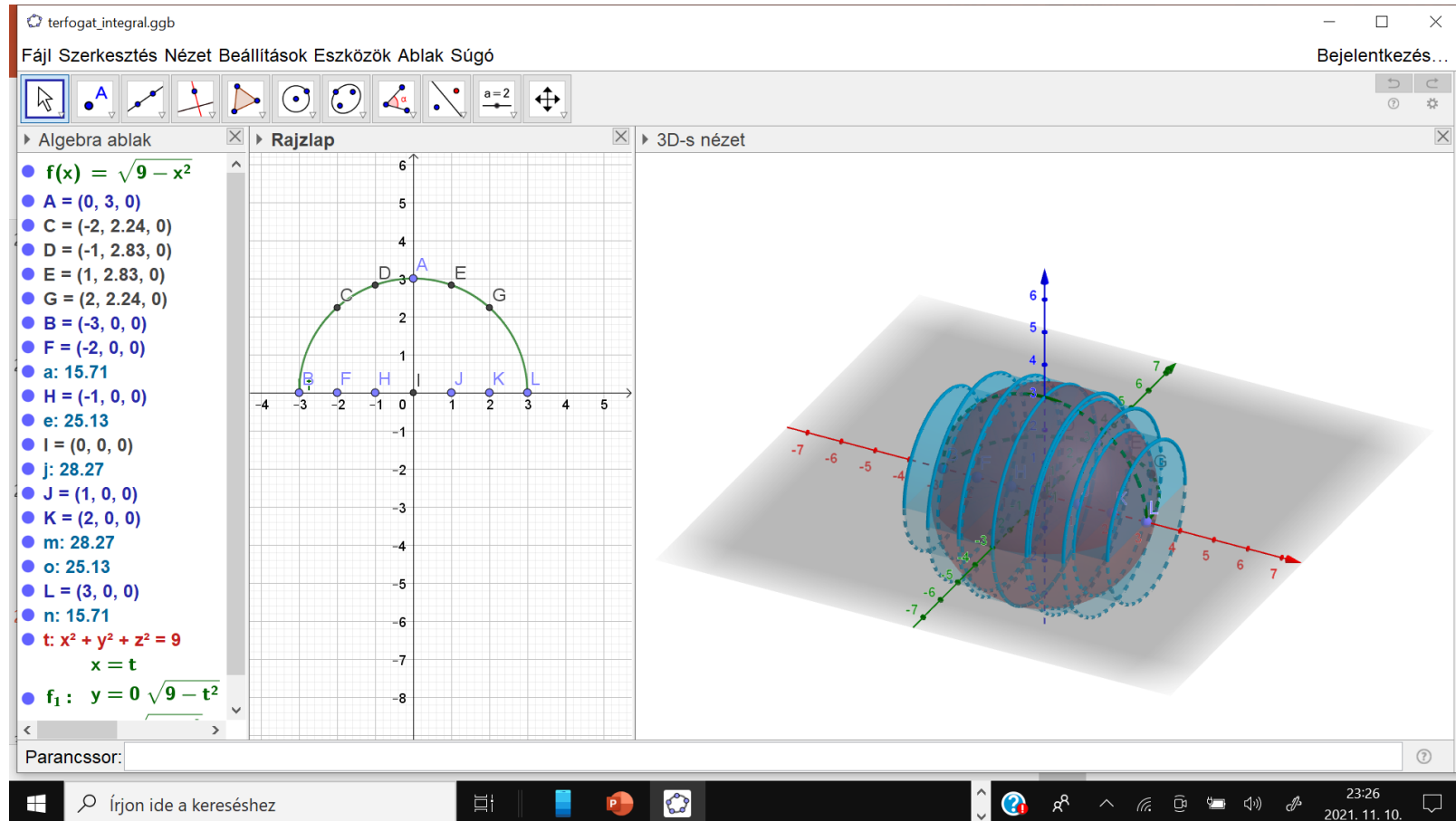


SŐT MÉG EZT IS?



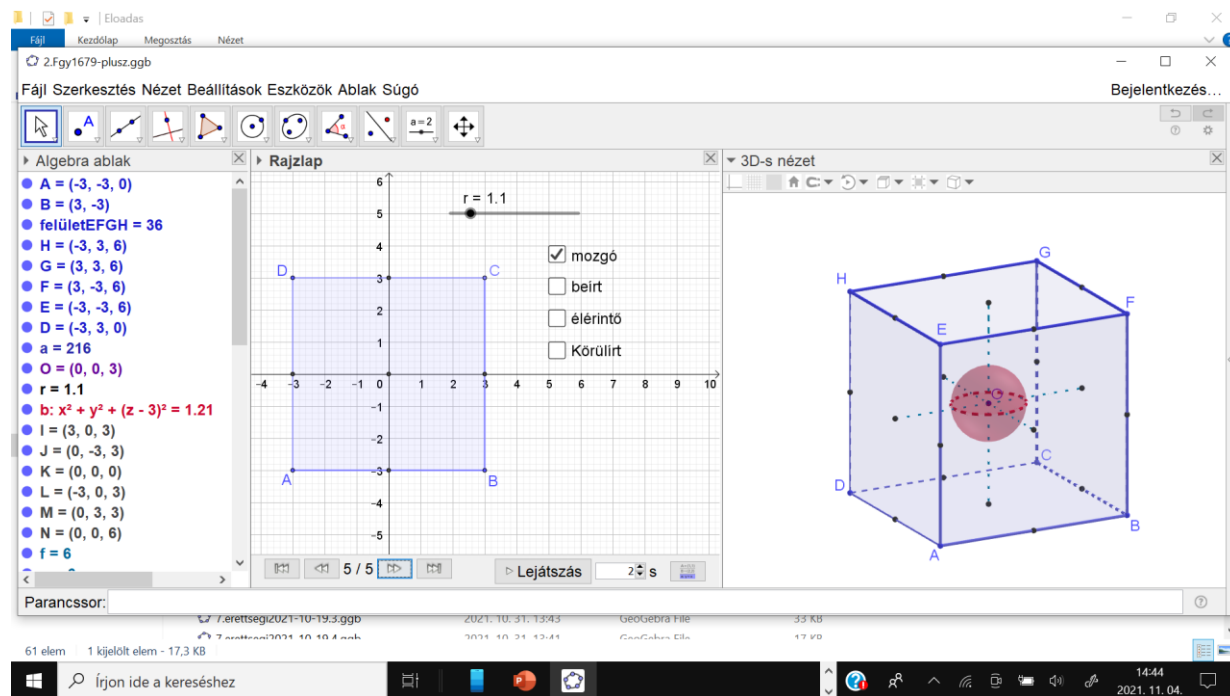
FORGÁSTEKTEK TÉRFOGATA

Integrálás gondolata felé



A KOCKA ÉS A GÖMBÖK

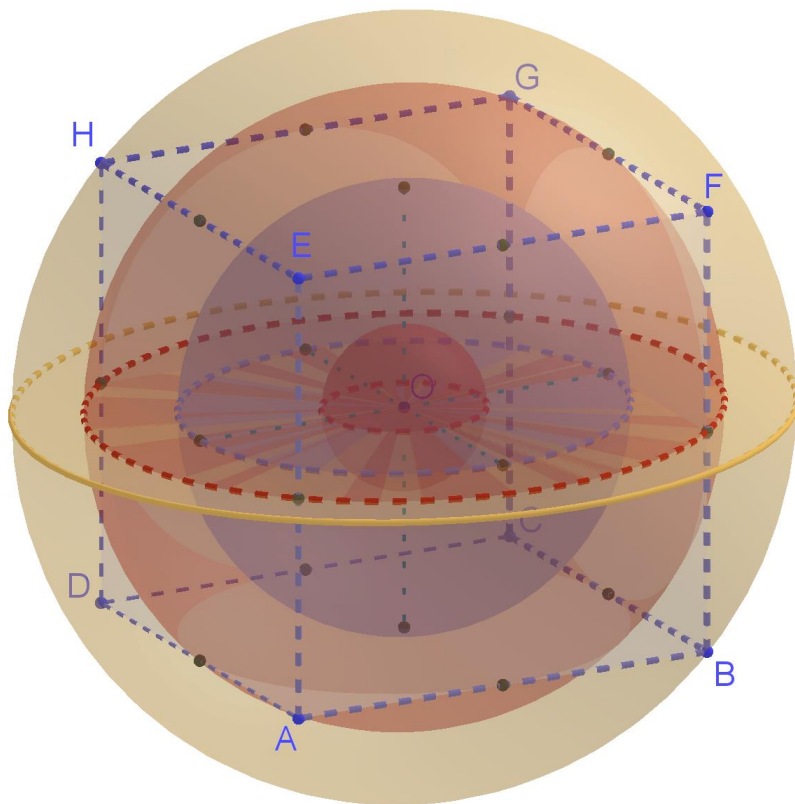
Feladatgyűjtemény 1679+



- A lépéseket lejátszhatjuk-navigációs eszköztár
- Csak a lényeges lépéseknél állhatunk meg
 - A szerkesztés lépései -töréspontok
- Csúszka és animáció
- Jelölőnégyzet használata

A KOCKA ÉS A GÖMBÖK

Feladatgyűjtemény 1679+



A kocka éle: a

- A beírt gömb sugara:

$$\frac{a}{2}$$

- Az éleket érintő gömb sugara:

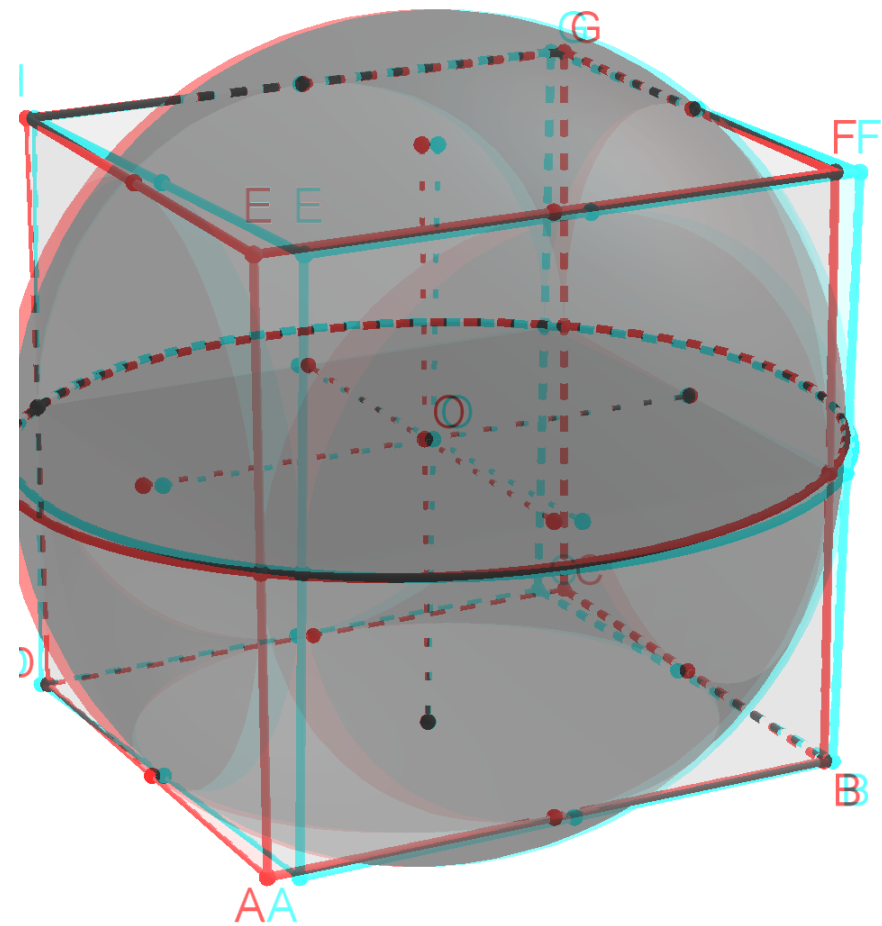
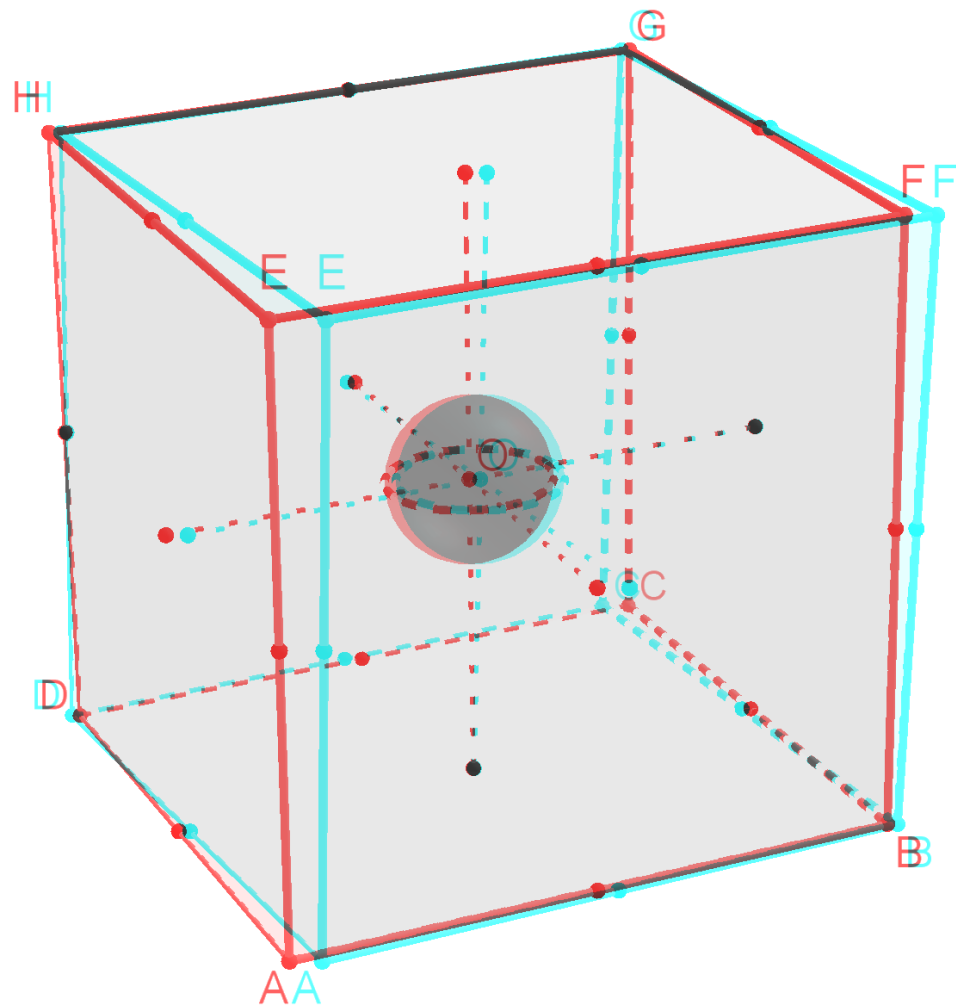
$$\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

A körülírt gömb sugara:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

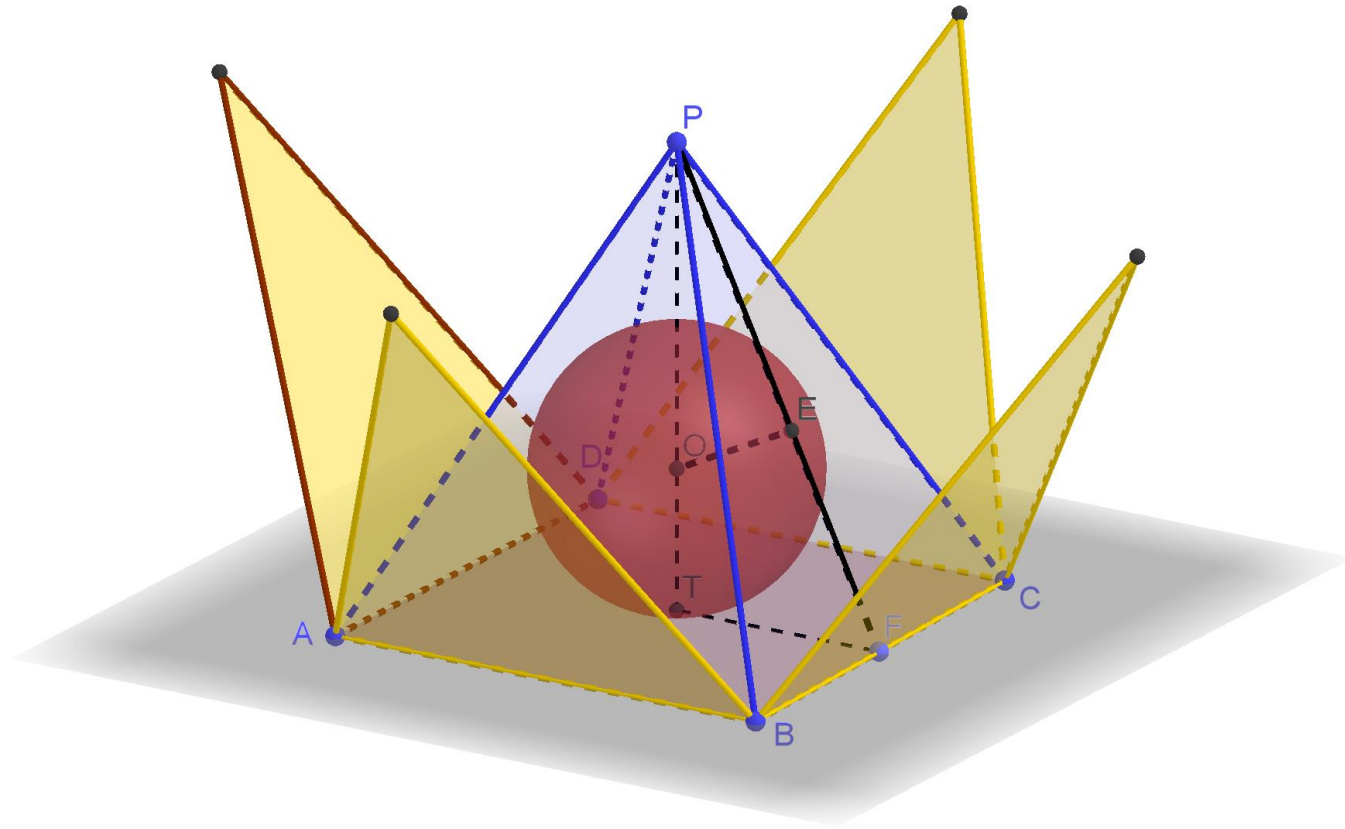
A KOCKA ÉS A GÖMBÖK

Feladatgyűjtemény 1679 – Nézzük szemüveggel! – Térlátásunk működése



VÉGÜL KÉRJÜNK EGY CSOKIGOLYÓT!

Egy test hálózata



HOGYAN TOVÁBB?

A GeoGebra hivatalos oldala

<https://www.geogebra.org/>

- Programok letöltése
- Online programhasználat
- Tananyagok elérése
- Saját anyagok feltöltése

AZ ANYAGOK ELÉRHETŐEK LESZNEK

<https://pontvelunk.itk.ppke.hu/>

(Az előadás videója, a prezentáció és a GeoGebra fájlok)

Tanári levelezőlistára jelentkezés

horveszt@t-online.hu

Köszönöm a figyelmet!