



PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem

Információs Technológiai és Bionikai Kar



*Katolikus
Pedagógiai
Intézet*

Középiskolai matematikatanárok szaktárgyi továbbképzése

2022. november 16.

RACIONÁLIS SZÁMOKTÓL A KOMPLEX SZÁMOKIG

2022. november 16.

dr. Kiss Géza

Középiskolai vezetőtanár

EGYIPTOMI TÖRTEK

Olyan törtek, amelyeknek számlálója 1. (Törzstört.)

Feladat: Írjuk fel a $\frac{3}{7}$ -et a lehető legkevesebb különböző törzstört összegeként.

Megoldás: Mohó algoritmussal dolgozunk.

Vegyük a legnagyobb törzstörtet, amely még kisebb, mint $\frac{3}{7}$,
ez az $\frac{1}{3}$.

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{21}.$$

Ismételjük meg az eljárást! Most az $\frac{1}{11}$ lesz a legnagyobb megfelelő törzstört.

$$\frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{1}{231},$$

vagyis:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

EGYIPTOMI TÖRTEK

Az $\frac{a}{b}$ tört előállítása csupa különböző törzstört összegeként.

Tétel (Erdős Pál): Az $\frac{a}{b}$ tört ($0 < a < b$) előáll legfeljebb a darab csupa különböző törzstört összegeként.

Bizonyítás: A számlálóra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

Az állítás természetesen igaz $a = 1$ -re.

Feltesszük, hogy igaz az állítás a -nál kisebb értékekre, ahol $a > 1$.

Az $\frac{a}{b}$ tört az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ számsorozat két szomszédos tagja közé esik, azaz

EGYIPTOMI TÖRTEK

Az $\frac{a}{b}$ tört előállítása csupa különböző törzstört összegeként

$$\frac{1}{x_1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{x_1-1}, \text{ ahol } x_1 > 1.$$

$$\text{Így } \frac{a}{b} - \frac{1}{x_1} = \frac{ax_1 - b}{bx_1} = \frac{a'}{bx_1}.$$

Ha $a' < a$, akkor az indukciós feltevés miatt igazoltuk az állítást.

Az $a' < a$ egyenlőtlenség valóban teljesül, mivel

$$\frac{1}{x_1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{x_1-1}, \quad b < ax_1 < a + b, \text{ tehát } 0 < ax_1 - b < a,$$

azaz $0 < a' < a$.

A csupa különböző törzstörtekhez elegendő

$$\frac{a'}{bx_1} < \frac{1}{x_1} \text{ is teljesül, mert } a' < a < b, \text{ így } \frac{a'}{bx_1} < \frac{b}{bx_1} = \frac{1}{x_1}.$$

SZAKASZOK ÖSSZEMÉRHETŐSÉGE

Feladat: Vegyük a következő végtelen lánc törtet.

Mennyi ennek a pontos értéke?

$$X = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}$$

Megoldás: Az első nevező második tagja éppen az eredeti tört.

Ezt felhasználva másodfokú egyenletet kapunk.

$$x = \frac{1}{1+x}, \quad \text{amelynek pozitív megoldása} \quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Az aranymetszés jól ismert aránya. $x : 1 = 1 : (x + 1).$

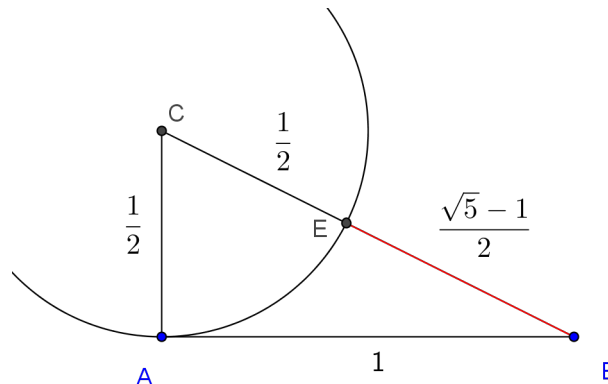
SZAKASZOK ÖSSZEMÉRHETŐSÉGE

Összemérhető-e az aranymetszés két szelete?

Ha van egy olyan kisebb szakasz, amelynek az egységszakasz b -szerese, az x szakasz pedig a -szorosa, akkor lépésenként $b-a$, $a-(b-a)$, ... vagyis mindegyik lépésben egyre kisebb szakaszt kapunk, de sohasem fogyhat el a szakasz hossza az állandó arány miatt. Ez ellentmondás. **NEM ÖSSZEMÉRHETŐEK.**

Az aranymetszés aránya nem racionális szám.

Megszerkeszthető az egységszakasz birtokában, pontos helye van a számegyenesen.



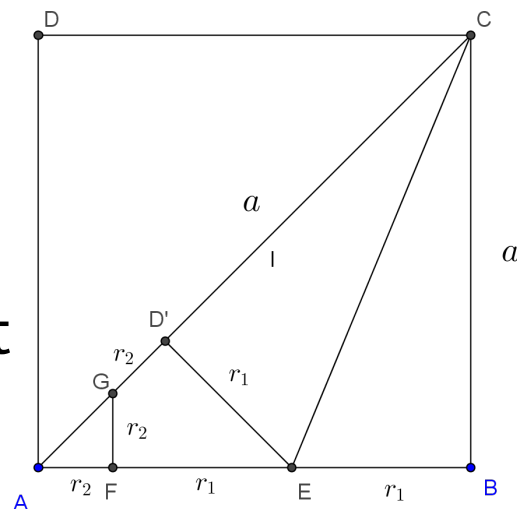
IRRACIONÁLIS SZÁMOK

$\sqrt{2}$ *irracionális szám*

Húzzuk meg a BCA szög felezőjét.

A második lépésben pedig AED' szög felezőjét.

Az első lépés után ismét egy négyzet átlóját és oldalát hasonlítjuk össze.



Ha $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, akkor legyen $d = \frac{a}{q}$.

Az eljárás során mindig a d többszöröseit kapjuk végtelen csökkenő sorozatban. Ez lehetetlen.

A négyzet átlója és oldala sem összemérhető.

IRRACIONÁLIS SZÁMOK

$\sqrt{2}$ *irracionális szám még mindig végtelen leszállással*

Tegyük fel, hogy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ahol p és q pozitív egészek.
Ekkor

$$\frac{2q-p}{p-q} = \frac{2 - \frac{p}{q}}{\left(\frac{p}{q}\right) - 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}.$$

$2q-p$ és $p-q$ pozitív egészek és $p-q < q$. Ismét végtelen leszállás lenne.

Ugyanez fogalmazható indirekt másként is, ha feltesszük, hogy q a minimális nevező.

Ekkor azzal jutunk ellentmondásra, hogy $p-q < q$.

IRRACIONÁLIS SZÁMOK

Miért szeretjük a legtöbbször szereplő bizonyítást?

Felhasználjuk a számelmélet alaptételét és indirekt bizonyítunk.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2.$$

A p^2 prímtényezős felbontásában mindegyik prím páros hatványon szerepel, míg $2q^2$ felbontásában a 2 kitevője biztosan páratlan.

Ez ellentmondás, mert $N = 2q^2 = p^2$ egyértelműen bontható fel prímek szorzatára.

Ugyanígy látható be, hogy minden olyan egynél nagyobb pozitív egész négyzetgyöke irracionális, amely nem négyzetszám. Minden olyan esetben is használható, amikor azonos átalakítással egy pozitív egész négyzetgyökéhez jutunk.

IRRACIONÁLIS SZÁMOK

Néhány további példa irracionális számokra, bizonyítással együtt

Feladat: Igazoljuk, hogy $\log_2 3$ irracionális szám.

Megoldás: Tegyük fel, hogy racionális és írjuk át hatványalakra.

$$\log_2 3 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2^{\frac{p}{q}} = 3 \Leftrightarrow 2^p = 3^q = N,$$

ahol p és q már pozitív egész számok. Ez viszont ismét ellentmondás, mert a N számot kétféleképpen is felírtuk prímek szorzataként.

Az is látható, hogy csak abban az esetben lesz a logaritmus értéke racionális, ha a numerus az alapnak racionális kitevőjű hatványa.

IRRACIONÁLIS SZÁMOK

Szögfüggvények értékeinek irracionálitása

Feladat: Racionális-e a $\sin 20^\circ$?

Megoldás: Felhasználjuk, hogy $\sin 60^\circ$ irracionális.

Számítsuk ki $\sin 60^\circ$ értékét a $\sin 20^\circ$ értékéből.

Ehhez addíciós tételt használunk. $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$.

Most tegyük fel, hogy $\sin 20^\circ$ racionális, akkor ennek egész kifejezése is racionális, ez ellentmondás.

$$\left(\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Igaz-e, hogy a többszörös szögek szögfüggvényei minden esetben polinomalakban írhatók fel, tehát, ha α bármelyik többszörösének szögfüggvénye irracionális, akkor az eredeti szögfüggvényérték is az?

IRRACIONÁLIS SZÁMOK

Szögfüggvények értékeinek irracionálitása – polinom vizsgálatával

Feladat: Racionális-e a $\cos 20^\circ$?

Megoldás: Ismét addíciós tételt használunk, de most a háromszoros szög cosinusa $\frac{1}{2}$. Legyen $\cos 20^\circ = x$.

A háromszoros szögre vonatkozó addíciós tétel:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

Behelyettesítés után egy harmadfokú egyenletet kapunk.

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Ha ennek az egyenletnek nincs racionális gyöke, akkor $\cos 20^\circ$ biztosan nem racionális szám.

IRRACIONÁLIS SZÁMOK

Szögfüggvények értékeinek irracionálitása – polinom vizsgálatával - folytatás

Ismert, hogy egész együtthatós polinom racionális gyökének számlálója csak a konstans tag osztója, nevezője pedig a főegyüttható osztója lehet. (Racionális gyökteszt)

A $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ behelyettesítése után látható, hogy ezek egyike sem gyöke az egyenletnek, következésképpen a $\cos 20^\circ$ nem racionális szám.

A harmadfokú egész együtthatós egyenletek nagy szerephez jutnak a szerkesztésméletben is. Jól alkalmazható tétel, hogy ha egy egész együtthatós harmadfokú egyenletnek nincs racionális gyöke, akkor egyik gyöke sem szerkeszthető meg euklideszi értelemben.

Előbbi példánk így mutatja, hogy a szögharmadolás biztosan nem oldható meg általában.

IRRACIONÁLIS SZÁMOK

Az előbbi ötlet további irracionálitási bizonyítást is eszünkbe juttat.

Az $x^2 - 2 = 0$ polinomnak vannak-e racionális gyökei?

A racionális gyökteszt alapján csak egészek lehetnek, amelyek osztói a 2-nek, vagyis $\pm 1, \pm 2$.

Ezek egyike sem megoldás, így az egyenletnek nincs racionális gyöke, $\sqrt{2}$ irracionális.

Ez a módszer természetesen magasabb gyökkitevők esetén is jól használható.

Irracionális szám-e a $\sqrt{3} + \sqrt{5}$?

Vagy irracionális-e $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$?

IRRACIONÁLIS SZÁMOK

Többtagú irracionálisok

Vegyünk egy olyan negyedfokú polinomegyenletet, amelynek gyökei $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, $\sqrt{3} - \sqrt{5}$, $-\sqrt{3} + \sqrt{5}$, $-\sqrt{3} - \sqrt{5}$.

$$(x - \sqrt{3} - \sqrt{5})(x - \sqrt{3} + \sqrt{5})(x + \sqrt{3} - \sqrt{5})(x + \sqrt{3} + \sqrt{5}) = 0.$$

Szorozzuk össze páronként a gyöktényezőket.

$$\left[(x - \sqrt{3})^2 - 5 \right] \left[(x + \sqrt{3})^2 - 5 \right] = 0,$$

$$(x^2 - 2 - 2\sqrt{3})(x^2 - 2 + 2\sqrt{3}) = 0,$$

Majd újra alkalmazva a nevezetes azonosságot:

$$x^4 - 4x^2 + 4 - 12x^2 = x^4 - 16x^2 + 4 = 0.$$

IRRACIONÁLIS SZÁMOK

Többtagú irracionálisok

Van-e racionális gyöke az $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$ egyenletnek?

A főegyüttható egy, így a racionális gyökök mindegyike csak egész lehet és osztója 4 -nek.

Gyorsan ellenőrizzük, hogy a $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ egyike sem gyöke az egyenletnek, így a felsorolt négy szám mindegyike irracionális.

Három gyök összegénél már nyolc előjeles lehetőség van. Az egyenlet nyolcadfokú lesz:

$$x^8 - 60x^6 + 782x^4 - 3180x^2 + 3481 = 0.$$

A $3481 = 59^2$, így elegendő $\pm 1, \pm 59, \pm 3481$ behelyettesítése.

Mind a nyolc szám irracionális.

VALÓS SZÁMOK

Tizedes törtek

Nagyon sokféle lehetőség van a periódikusság „elrontására”.

Feladat: Hányféleképpen folytatható egy tízjegyű periódus, hogy a következő tíz jegy ne legyen megfelelő?

A válasz $(10^{10} - 2)$ máris mutatja, hogy mennyivel több irracionális szám lehet, mint racionális.

Feladat: Mutassuk meg, hogy a π tizedesjegyei közt van három egymást követő számjegy, melyek így együtt végtelen sokszor fordulnak elő.

Három egymást követő számjegyből álló hármas 10^3 lehet, míg a tizedesek végtelen sorozatában végtelen sok hármas szerepel.

VALÓS SZÁMOK

Közelítsünk!

Feladat: Mutassuk meg, hogy a

$$\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \dots, 10\sqrt{3}$$

Számok között van legalább egy olyan, amely valamelyik egész számtól legfeljebb $\frac{1}{10}$ -nél kevesebbel tér el.

Megoldás: Csavarjuk fel a számegyenest 1 egység kerületű körvonalra.

Az egész számoknak megfelelő pontok mind egy A pontba esnek.

Innen számítva osztjuk fel $\frac{1}{10}$ hosszúságú ívekre a körvonalat.

VALÓS SZÁMOK

Közelítsünk! -- folytatás

Ha az A két oldalán levő sávba esik $k\sqrt{3}$, akkor ez megfelelő.

Ha nem, akkor a maradék nyolc sávba esik **10** szám, így valamelyikbe biztosan legalább két szám esne.

Erre a két többszörösre $n\sqrt{3} - m\sqrt{3} = p + t$, ahol p egész és $|t| < \frac{1}{10}$. Így is találtunk megfelelőt.

$$|n - m|\sqrt{3}.$$

Látjuk, hogy ez a közelítés tovább is finomítható.

VALÓS SZÁMOK, SZÁMEGYENES

Racionális és irracionális számok elhelyezkedése a számegyenesen

Van-e bármely két racionális szám között racionális szám?

Van-e két racionális szám között végtelen sok racionális szám?

Van-e két racionális szám között irracionális szám?

Van-e két racionális szám között végtelen sok irracionális szám?

Van-e két irracionális szám között racionális szám?

Van-e két irracionális szám között végtelen sok racionális szám?

Van-e két irracionális szám között újabb irracionális szám?

Van-e két irracionális szám között végtelen sok irracionális szám?

KOMPLEX SZÁMOK

Bevezető lépések, gondolatok

Miért érdemes bővíteni a számfogalmat?

(Későbbi tanulmányok, klasszikus kérdések, matematikatörténet, kapcsolódás a fizikához.)

Harmadfokú egyenletek a „casus irreducibilis”.

Addíciós tételek, hatványozás, gyökvonás.

Érdekes geometriai feladatok.

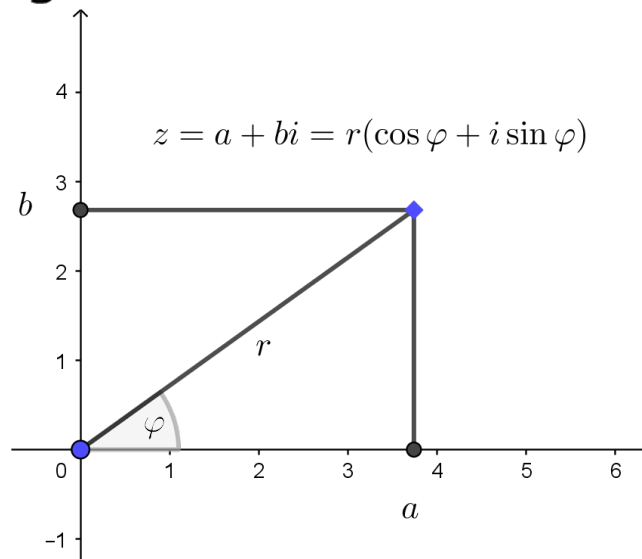
Vektor és szám új megvilágítása.

Kanonikus alak és/vagy trigonometrikus alak?

KOMPLEX SZÁMOK

Egy rövid ismételés

Az $z = a + bi$ alakban az a és b valós számok, ez a kanonikus vagy algebrai alak.



$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ a trigonometrikus alak. Itt r a komplex szám abszolútértéke, α az argumentum, a valós tengely pozitív felével bezárt szög. ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$).

KOMPLEX SZÁMOK

Egy feladat a kanonikus alak számelméleti alkalmazásához

Feladat: Fel lehet írni a 3869 -et két négyzetszám összegeként? Ha fel lehet írni, akkor hányféleképpen lehet felírni?

Megoldás: Bontsuk először is a számot prímek szorzatára.

$$3869 = 73 \cdot 53.$$

A 53-at (azonnal látjuk, hogy) fel tudjuk írni két négyzetszám összegeként: $53 = 7^2 + 2^2$.

A másik tényező esetében is gyorsan rátalálunk a megfelelő felbontásra: $73 = 8^2 + 3^2$.

Hogyan tovább? Mit tudunk mondani a szorzatukról?

KOMPLEX SZÁMOK

Egy feladat a kanonikus alak számelméleti alkalmazásához

Ehhez Gauss zseniális, ugyanakkor természetes ötletét hívjuk segítségül.

$$a^2 + b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 - i^2b^2 = (a + bi)(a - bi).$$

A két komplex szám egymás konjugáltja, a szorzat valós, sőt egész. (Ezek a ún. Gauss-egészek.)

Most vissza a feladathoz.

$$3869 = 73 \cdot 53 = (64 + 9)(49 + 4) = (8 + 3i)(8 - 3i)(7 + 2i)(7 - 2i).$$

Kétféleképpen is tudunk úgy párokat képezni, hogy a konjugáltság teljesüljön.

KOMPLEX SZÁMOK

Egy feladat a kanonikus alak számelméleti alkalmazásához

Az egyik lehetőség: $(7 + 2i)(8 + 3i)$

és a konjugáltja: $(7 - 2i)(8 - 3i)$.

Külön-külön összeszorozva:

$$(7 + 2i)(8 + 3i) = 56 + 6i^2 + 16i + 21i = 50 + 37i.$$

A konjugáltakra pedig:

$$(7 - 2i)(8 - 3i) = 56 + 6i^2 - 16i - 21i = 50 - 37i.$$

E két szám szorzásával kapunk is egy felbontást:

$$(50 + 37i)(50 - 37i) = 50^2 - 37^2 i^2 = 50^2 + 37^2 = 2500 + 1369 = 3869.$$

KOMPLEX SZÁMOK

Egy feladat a kanonikus alak számelméleti alkalmazásához

Van-e más lehetőség?

Párosítsuk most ellentétesen a kéttagúakat:

$$(7 + 2i)(8 - 3i) = 56 - 6i^2 + 16i - 21i = 62 - 5i,$$

$$(7 - 2i)(8 + 3i) = 56 - 6i^2 - 16i + 21i = 62 + 5i.$$

Ezt a két számot szorozva egy másik számpárt kapunk.

$$(62 - 5i)(62 + 5i) = 62^2 + 5^2 = 3844 + 25 = 3869.$$

Az elmélet alapján ez a két megoldás van.

KOMPLEX SZÁMOK

Többszörös szögek szögfüggvényei másként

A komplex számok trigonometrikus alakja segítségével:

$$(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \cdot \sin(n\alpha).$$

Nézzük $n = 5$ esetét.

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^5 &= \cos^5 \alpha + i \cdot 5 \cos^4 \alpha \cdot \sin \alpha + i^2 \cdot 10 \cos^3 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \\ &+ i^3 \cdot 10 \cos^2 \alpha \cdot \sin^3 \alpha + i^4 \cdot 5 \cos \alpha \cdot \sin^4 \alpha + i^5 \cdot \sin^5 \alpha. \end{aligned}$$

Válasszuk külön a valós és képzetes részt.

$$\begin{aligned} \cos 5\alpha + i \cdot \sin 5\alpha &= (\cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha + 5 \cos \alpha \sin^4 \alpha) + \\ &+ i \cdot (5 \cos^4 \alpha \sin \alpha - 10 \cos^2 \alpha \sin^3 \alpha + \sin^5 \alpha). \end{aligned}$$

KOMPLEX SZÁMOK

Többszörös szögek szögfüggvényei másként

A négyzetes összefüggés felhasználása után kezelhető egyváltozós formulákat kapunk:

$$\cos 5\alpha = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha,$$

$$\sin 5\alpha = 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha.$$

Az ötszörös szögek szinuszai és koszinuszai az eredeti szinusz és koszinusz értékekből egész együtthatós polinommal számolhatók ki.

Azaz: ha **$\sin \alpha$** és **$\cos \alpha$** racionálisak, akkor páratlan többszöröseik szinuszai és koszinuszai is racionálisak.

KOMPLEX SZÁMOK ÉS IRRACIONALITÁS

Vissza az irracionális számokhoz

Lehet-e $\sin 9^\circ$ és $\cos 9^\circ$ racionális szám?

Ha ezek racionálisak lennének, akkor az ötszörös szögek, a 45° szinusza és koszinusza is racionális lenne. Ez nincs így, tehát 9° szinusza és koszinusza irracionális.

A háromszoros szögek szögfüggvényei alapján ezután már látjuk, hogy 3° , majd ugyanezzel a módszerrel 1° szinusza és koszinusza is irracionális.

Mi a helyzet a páros számoknál?

Mit mondhatunk $2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, \dots$ szinuszairól és koszinuszairól?

RACIONÁLIS SZÁMOKTÓL A KOMPLEX SZÁMOKIG

Befejezés

A gyerekekkel közösen sok további észrevétel tehető a szögfüggvények értékeinek irracionalitásáról.



Köszönöm a figyelmet!

FELHASZNÁLT IRODALOM

- Laczkovich Miklós: Sejtés és bizonyítás, Typotex Kiadó, 1998.
- Freud Róbert-Gyarmati Edit: Számelmélet, Nemzeti tankönyvkiadó, 2000.
- Turán Pál-Gyarmati Edit: Számelmélet, Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, 1976.
- Matematika feladatgyűjtemény I. (Sárga fgy.) Nemzeti Tankönyvkiadó