PÁZMÁNY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem

Információs Technológiai és Bionikai Kar

Katolikus Pedagógiai Intézet

# Középiskolai matematikatanárok szaktárgyi továbbképzése

2022. november 16.

# SZÁMKÖRBŐVÍTÉS I. - TERMÉSZETES SZÁMOKTÓL A RACIONÁLIS SZÁMOKIG

2022. november 16.

**Dr. Dobos Sándor**

*Budapesti  Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium*

# TERMÉSZETES SZÁMOK

- Számfogalom  -   pozitív egészek
- Barlangrajzok, ékírásos táblák, rováspálca (1826-ig), …
- Számrendszerek, számok nevei és írásjelei
- Hogyan számolunk?

# POZITÍV EGÉSZEK HOGYAN SZÁMOLUNK?

## *1.feladat*

- XXXXXXXXXXXXXXXX (16 db)
- Hány X-et látunk? Számoljunk 3-as számrendszerben!
- Első megközelítés: 1-esek, 3-asok, 9-esek, 27-esek,...$\Rightarrow 121_3$
- Második megközelítés: XXX XXX XXX XXX XXX X, ezért az utolsó jegy (az 1-esek helyén álló, bal szélső) az 1;
- (XXX XXX XXX) XXX XXX, ezért a 3-asok helyén álló következő jegy a 2;
- Végül a 9-esek helyén is 1 áll.

## POZITÍV EGÉSZEK

## HOGYAN SZÁMOLUNK

- $16=5\cdot 3+1$
- $5=1\cdot 3+2$
- $1=0\cdot 3+1$

## POZITÍV EGÉSZEK HOGYAN SZÁMOLUNK

*Didaktikai megjegyzés*

- Matektábor játékos feladata:
- A diákok csoportokat alkotnak. Minden csoport kap majd $n$ babszemet, $100<n<1000$. Le kell írniuk, hány babszemet kaptak $b$ alapú számrendszerben, $1<b<10$. Előre megbeszélhetik a módszerüket és meg kell becsülniük, milyen hamar lesznek készen $n$ és $b$ függvényében, ezt egy táblázatba írják be előre.
- A játék végén elmondhatják a módszerüket, és összehasonlíthatják a sebességüket és a becslésüket.

*2. feladat*

Írjuk fel 55-öt -4 alapú számrendszerben.

- helyiértékek a -4 hatványai, azaz 1, -4, 16, -64, …
- számjegyek a 0, 1, 2, 3.

# TERMÉSZETES ??? SZÁMOK

- Mi legyen a NULLÁVAL?
- Szám-e?
- Hány eleme van az üres halmaznak?
- Mennyi az üres halmaz elemeinek összege?
- Pozitív-e a nulla?
- Életkornak megfelelő beszélgetés lehetősége.

# EGÉSZ SZÁMOK

*Didaktikai megjegyzés*

- Érdemes törekedni a szemléletességre, az élethez kapcsolódó tapasztalatokra:
- Lift
- Hőmérő
- Mozgás a számegyenesen
- A negatív számok és az adósság fogalmának összekötése ennél absztraktabb .
- Műveletek (összeadás és kivonás)

## EGÉSZ SZÁMOK

*Didaktikai megjegyzés*

- Az összeadás, kivonás, szorzás nem vezet ki.
- Az osztás művelete kivezet a számkörből!
- Algebrai háttér: csoport, gyűrű, test. Ha eljutunk a mod $p$ struktúrához, érdemes összevetést tenni. Ez remekül bemutatható pl az ötös maradékokon.

# EGÉSZ SZÁMOK

*3. feladat*

Diofantikus problémák, egyenletek

$$a^3 + 2b^3 = 4c^3$$

## EGÉSZ SZÁMOK

$$a^3 + 2b^3 = 4c^3$$

$2b^3$ és $4c^3$ párosak, ezért $a$ is az, tehát $a = 2A$,

$8A^3 + 2b^3 = 4c^3$, azaz $4A^3 + b^3 = 2c^3$.

Ezek szerint $b$ páros, tehát $b = 2B$,

$4A^3 + 8B^3 = 2c^3$, azaz $2A^3 + 4B^3 = c^3$.

Ezek szerint $c$ páros, tehát $c = 2C$,

$2A^3 + 4B^3 = 8C^3$, azaz $A^3 + 2B^3 = 4C^3$.

Végtelen leszállás, nincs megoldás.

# RACIONÁLIS SZÁMOK

*4. feladat*

Átváltás közönséges tört és tizedestört alakok között.

(i) Mi lesz a $\frac{21}{45}$ tizedestört alakja?

(ii) Legyen (a,b)=1. Véges tizedestört lesz-e $\frac{a}{b}$, ha nem, megmondható-e előre a periódus hossza?

(iii) Hogyan írható fel közönséges tört alakban a $2.14$ vagy a $2.3\dot{1}\dot{4}$ ?

# RACIONÁLIS SZÁMOK

(ii) demonstráció: $\frac{11}{23}$, ekkor legyen $\frac{11}{23} = X.Y\dot{Z}$, ahol X , Y és Z lehetnek több jegyűek, jegyeik száma legyen x, y, illetve z

Ekkor $\frac{11}{23} \cdot 10^{y} = XY.\dot{Z}$ és $\frac{11}{23} \cdot 10^{y+z} = XYZ.\dot{Z}$

$\frac{11}{23} \cdot 10^{y}(10^{z} - 1) = XYZ - XY,$ tehát

$23 \mid 10^{z} - 1$ , a periódus hossza, a legkisebb 10 hatvány kitevője, amelynek 23-as maradéka 1, (azaz 10 rendje mod 23).

# RACIONÁLIS SZÁMOK

(iii) átváltás tizedestörtből közönséges törtbe:

$2.3\dot{1}\dot{4} = X$ , beszorzunk úgy, hogy a periódus az egészrész után kezdődjön, éppen a tizedesvessző után: $23.\dot{1}\dot{4} = 10X$

Szorzunk $10^p$-nel, ahol p(=2) a periódus hossza : $2314.\dot{1}\dot{4} = 1000X$

Ekkor $2314 - 23 = (1000 - 10)X$ , leosztunk:

$$\frac{2291}{990} = X$$

# RACIONÁLIS SZÁMOK

## *5. feladat*

Keressük azt a legkisebb nevezőjű közönséges törtet, amely a $\frac{2}{5}$ és a $\frac{3}{7}$ között van.

## RACIONÁLIS SZÁMOK

Barátkozzunk meg a feladattal: $0 \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \quad 1.$

$0 \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{1}{2} \quad 1.$

$0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad 1.$

$0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad 1.$ …… n-edik Farey sorozat

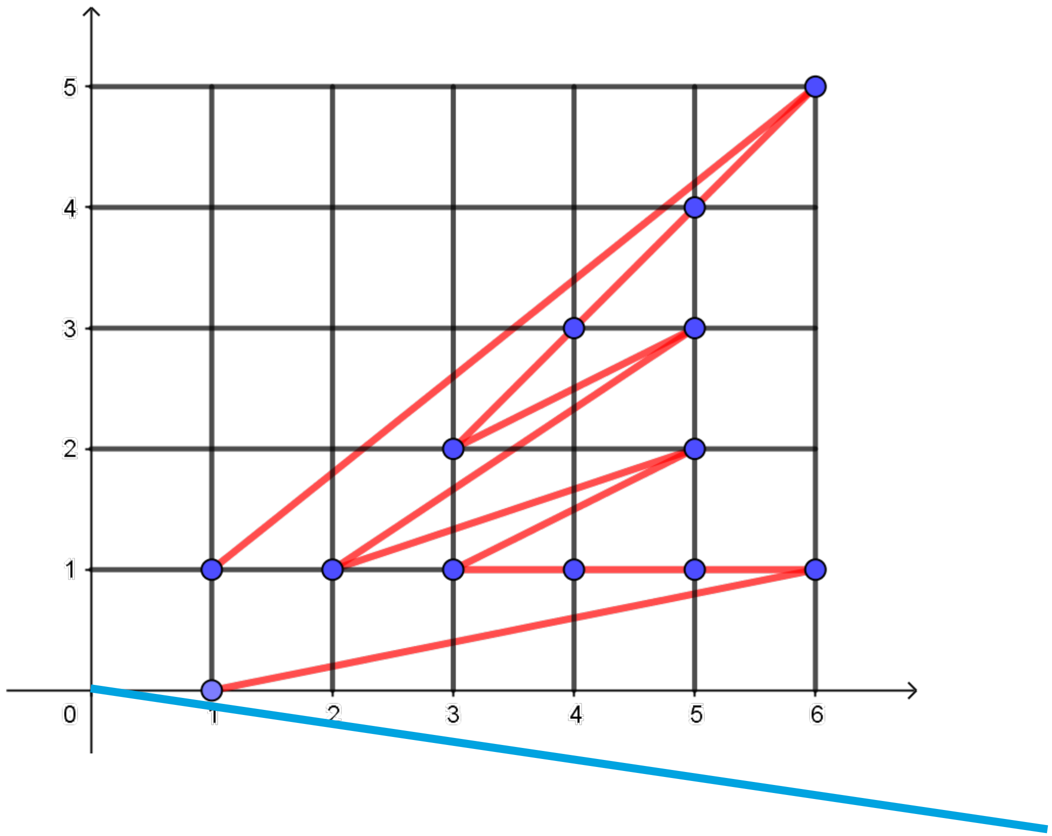
## RACIONÁLIS SZÁMOK

- John Farey geológus (1816)
- F(6): $\frac{0}{1}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{5}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{2}{5}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{3}{5}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{3}{4}\quad \frac{4}{5}\quad \frac{5}{6}\quad \frac{1}{1}.$
- Két szomszédos tört különbsége a nevezők szorzatának reciproka.
- Legyen $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ mediánsa $\frac{a+c}{b+d}$ ;

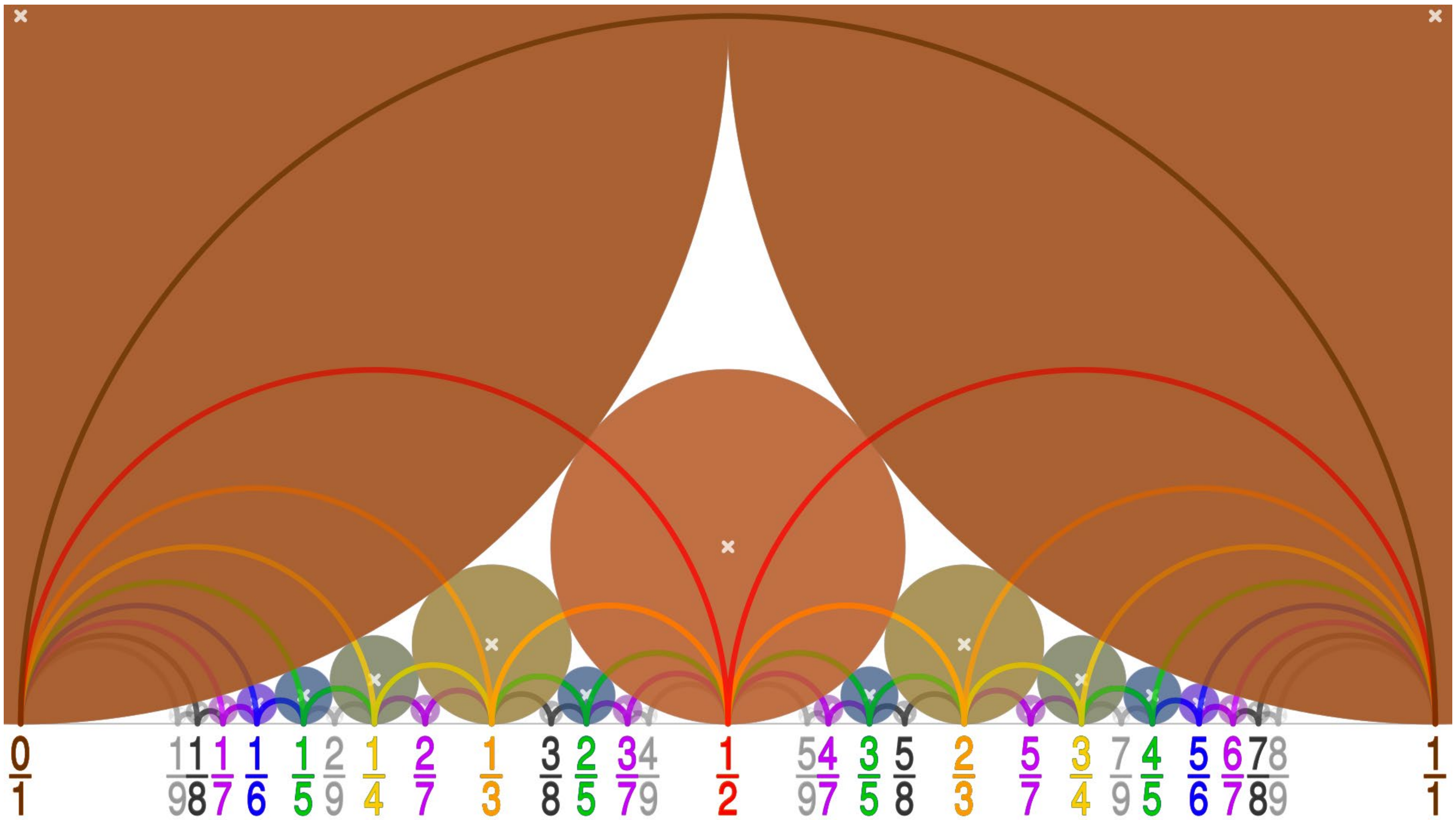
a sorozatban három egymás utáni tört közül a középső a két szélső mediánsa (bizonyítás Cauchy)

# RACIONÁLIS SZÁMOK TÖRTEK ÉS RÁCSGEOMETRIA

F(6): $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{1}$.

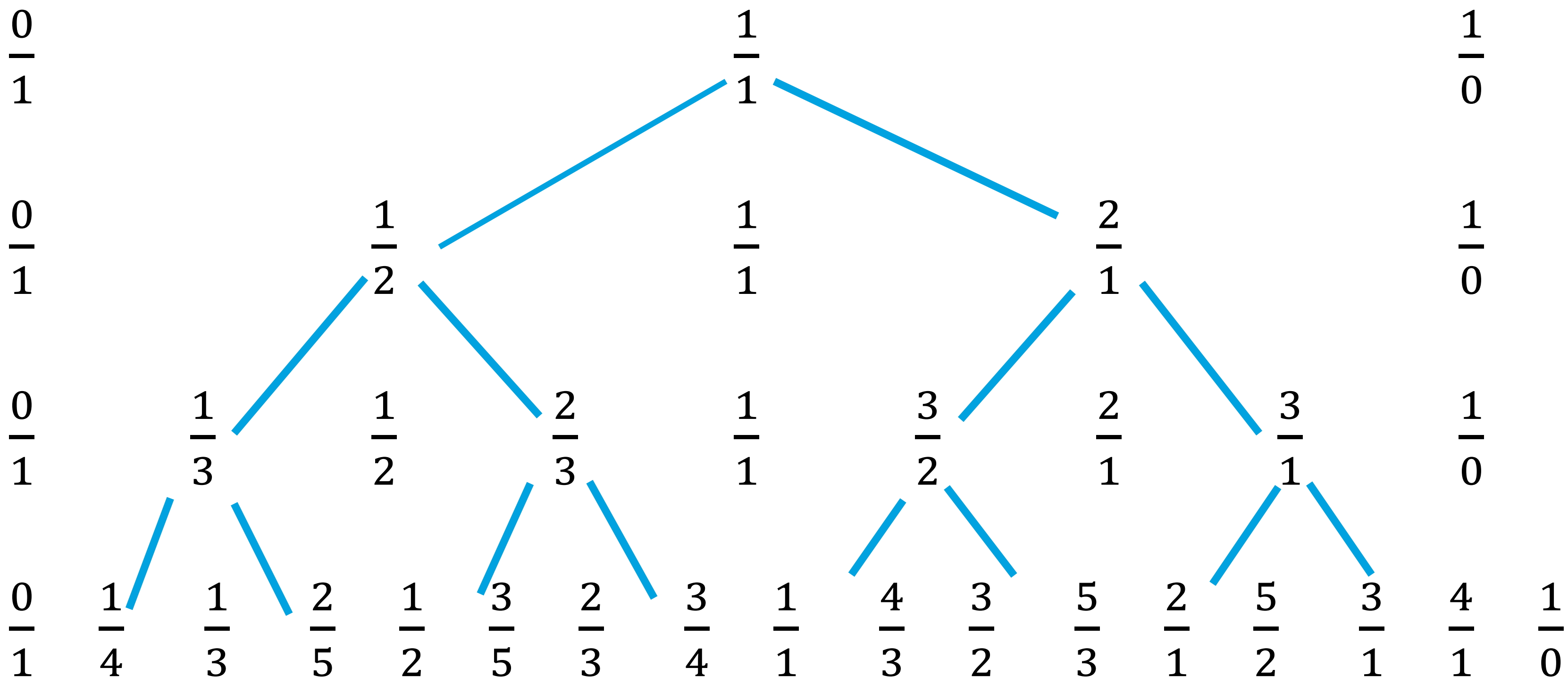


# RACIONÁLIS SZÁMOK FORD KÖRÖK FORRÁS WIKIPÉDIA



# RACIONÁLIS SZÁMOK

# STERN-BROCOT FA



# RACIONÁLIS SZÁMOK



## *6. feladat*

(a) Igazoljuk, hogy *n* különböző $\frac{a_i}{b_i}$ alakú, de nem feltétlen különböző értékű racionális számot kiválasztva a (0; 1) intervallumból, a számok nevezőinek összege legalább

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot n^{\frac{3}{2}}$$

(b) Igazoljuk, hogy ha feltesszük a számokról, hogy különböző értékűek is, akkor a számok nevezőinek összege legalább

$$2 \cdot \left(\frac{2n}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Megjegyzés. Legyenek a számlálók és nevezők is pozitív egészek. Az $\frac{a_i}{b_i}$ és $\frac{a_j}{b_j}$ számok különböző alakúak, ha a számlálójuk, vagy nevezőjük közül legalább az egyik különböző. Az említett két tört különböző értékű, ha nem egyenlők.

## RACIONÁLIS SZÁMOK

Igazoljuk, hogy *n* különböző $\frac{a_i}{b_i}$ alakú, de nem feltétlen különböző értékű racionális számot kiválasztva a (0; 1) intervallumból, a számok nevezőinek összege legalább

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot n^{\frac{3}{2}}$$

Mit mond az állítás kicsi *n* értékekre?

Szeretnénk elérni, hogy a nevezők összege a lehető legkisebb legyen. Melyik *n* törtet válasszuk ki ehhez?

## RACIONÁLIS SZÁMOK

Igazoljuk, hogy *n* különböző $\frac{a_i}{b_i}$ alakú (de nem feltétlen különböző értékű

racionális számot kiválasztva a (0; 1) intervallumból, a számok nevezőinek összege legalább

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot n^{\frac{3}{2}}$$

n=1 esetén $b_1 > \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

n=2 esetén $b_1 + b_2 > \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$.

# RACIONÁLIS SZÁMOK

Legyen $s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Mely törteket válasszuk, hogy ez a lehető legkisebb legyen?

$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5};\ \ldots$

Jelölje a lehető legkisebb $s_n$ értéket $S_n$:

$S_1 = 2;\quad S_2 = 2 + 3 = 5;\quad S_3 = 2 + 3 + 3 = 8;$

$S_4 = 2 + 3 + 3 + 4 = 12; \ldots$

Ezt akkor kapjuk, ha a nevezőket a fenti törtekből vesszük sorban, ezt a sorozatot jelölje:

$B_1 = 2; B_2 = 3; B_3 = 3; B_4 = 4; B_5 = 4;\ \ldots.$

Ezek összegét becsüljük alulról $\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot n^{\frac{3}{2}}$.

# RACIONÁLIS SZÁMOK

$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \ \dots$

$B_1 = 2; B_2 = 3; B_3 = 3; B_4 = 4; B_5 = 4; \ \dots.$

Megmutatjuk, hogy $B_i > \sqrt{2i}$.

$2 > \sqrt{2}; \quad 3 > \sqrt{4}; \quad 3 > \sqrt{6}; \quad 4 > \sqrt{8}; \dots.$

Mivel a $\sqrt{2i}$ szigorúan monoton nő, elegendő a $B_i$ sorozatból azokat az elemeket ellenőrizni, amikor egy értéket a legnagyobb indexű elemnél veszi fel:

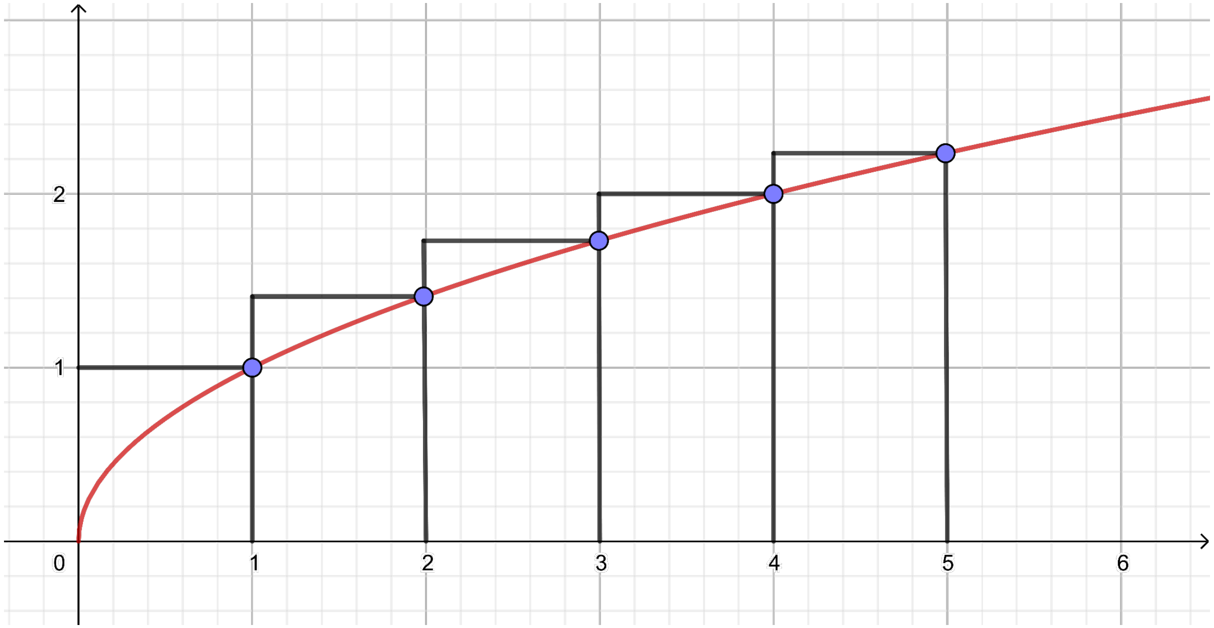
$$B_{\binom{m}{2}} = m > \sqrt{2 \cdot \binom{m}{2}} = \sqrt{m(m-1)}.$$

# RACIONÁLIS SZÁMOK

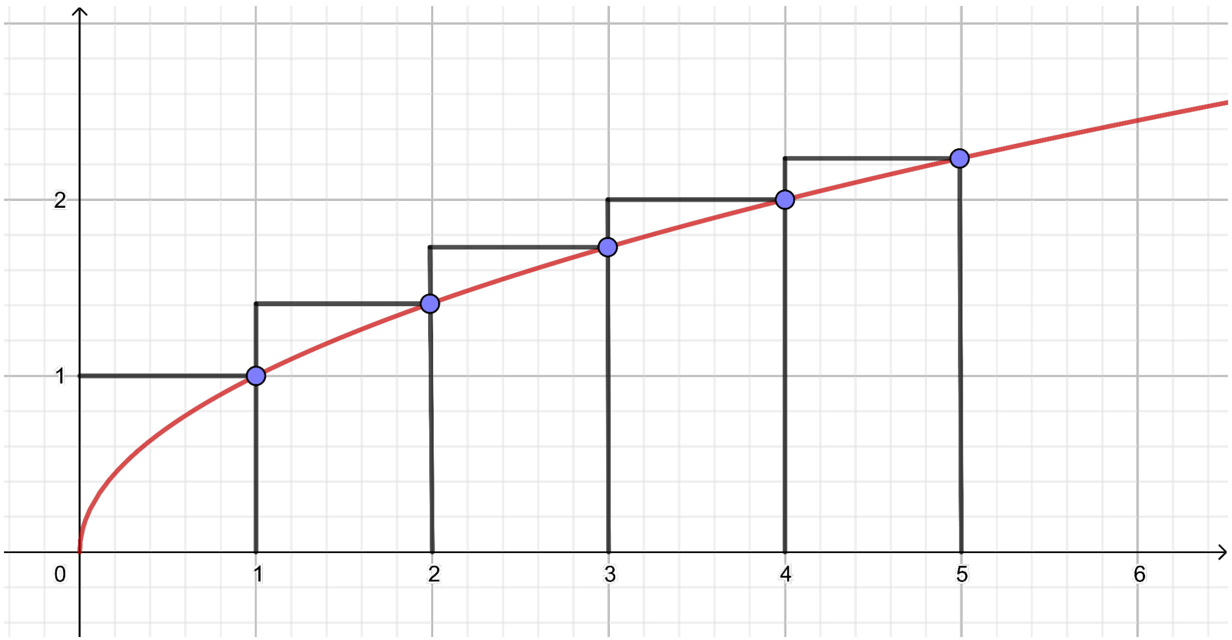
A $B_i > \sqrt{2i}$ becslést felhasználva

$$S_n > \sqrt{2} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{2n} =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}\right)$$



# RACIONÁLIS SZÁMOK




$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n} \geq \int_0^n \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^n = \frac{2}{3}\cdot n^{\frac{3}{2}}$$

# RACIONÁLIS SZÁMOK

Innen: $s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq S_n$

$$S_n > \sqrt{2}\left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}\right) \geq \sqrt{2}\int_0^n \sqrt{x}dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot n^{\frac{3}{2}}$$

## AJÁNLOTT IRODALOM

Surányi János: Farey-törtek (fazekas.hu)

Oktatási Hivatal (oktatas.hu)

# Köszönöm a figyelmet!